



WYKŁAD 3. DYNAMIKA ROZWOJU POPULACJI

MODELE Z CZASEM DYSKRETNYM
BUDOWA MODELU MATEMATYCZNEGO

DR WIOLETA DROBIK- CZWARNO

STAN POPULACJI

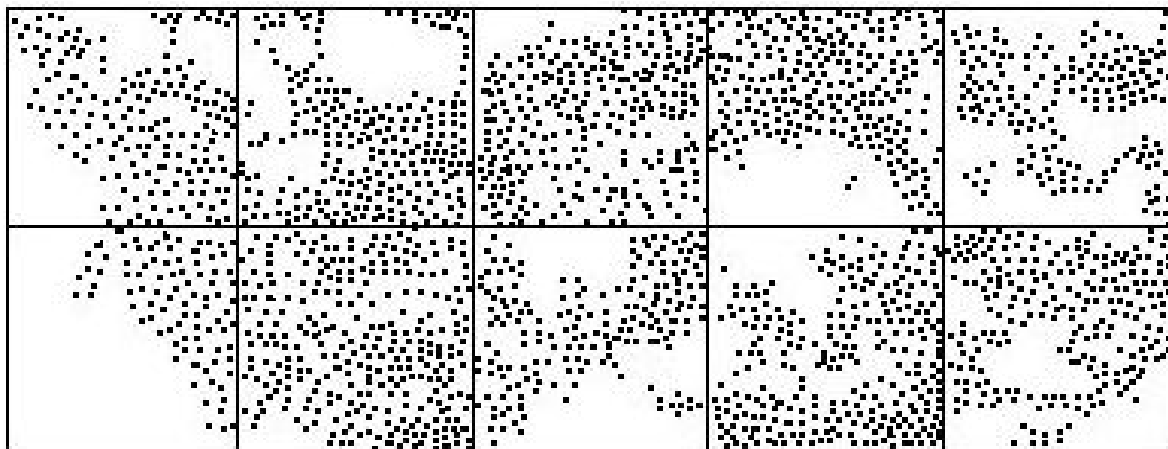
- **Stan populacji** wyrażany jako liczebność lub zagęszczenie wszystkich osobników w danej chwili
 - Przyjmujemy, że liczebność reprezentowana jest przez **liczby rzeczywiste, a nie całkowite**
 - Przybliżenie jest dopuszczalne jeżeli liczebności populacji są dużymi liczbami - czym mniejsze liczebności tym większy błąd



ZAGĘSZCZENIE POPULACJI

Liczebność populacji jest dobrą miarą jej stanu o ile rozmieszczenie osobników jest równomierne

Zagęszczenie populacji to liczba osobników występujących na obszarze jednostkowej powierzchni (np. 1 km², 1 m²) lub w obszarze jednostkowej objętości (np. 1 m³, 1 litr)



MODELE ZMIAN ZAGĘSZCZENIA POPULACJI

Wyróżniamy modele:

- z czasem **dyskretnym** - równania **różnicowe (rekurencyjne)**

$$n(t + 1) = f(n(t))$$

$$\Delta n = n(t + 1) - n(t) = g(n(t)) = f(n(t)) - n(t)$$

gdzie f i g są funkcjami, które opisują jak stan populacji w kroku czasowym t determinuje jej stan w kolejnym kroku czasowym $t+1$

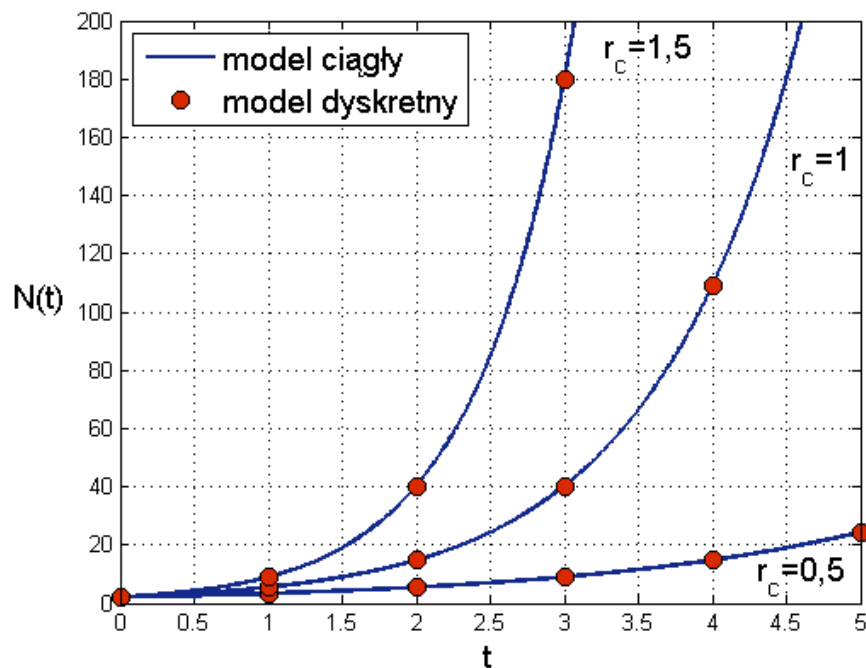
- z czasem **ciągłym** – równania **różniczkowe**

$$\frac{dn}{dt} = f(n)$$

gdzie f opisuje zmianę stanu populacji w czasie jako funkcję obecnego stanu populacji

MODELE Z CZASEM DYSKRETNYM – KIEDY?

- Możemy określić:
 - Wielkość populacji w i -tym roku
 - Proporcja osobników będących nosicielami pod względem wybranego genu w i -tym pokoleniu
 - Zagęszczenie bakterii w hodowli w i -tym dniu
 - Stężenie toksycznego gazu w płucach po i -tym oddechu
 - Stężenie narkotyku we krwi po i -tej dawce



Do którego z tych przykładów można zastosować również model z czasem ciągłym?

Foryś U., Poleszczuk J. Modelowanie matematyczne w biologii i medycynie
<http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=mbm&part=Ch1>

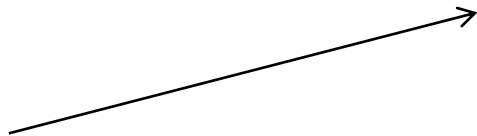
MODELE Z CZASEM DYSKRETNYM

- Stan populacji tylko w wyróżnionych momentach (np. latach, miesiącach, sezonach) – $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k$
- Krok czasowy (k) oznaczamy Δt , gdzie dla dowolnego $k \geq 1$:

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k$$

- Stan populacji w danym momencie t_k oznaczamy przez N_k
- Początkowy stan populacji oznaczamy N_0
- Równanie rekurencyjne (**różnicowe**):

$$N_k = N_{k-1} + F(N_{k-1})$$

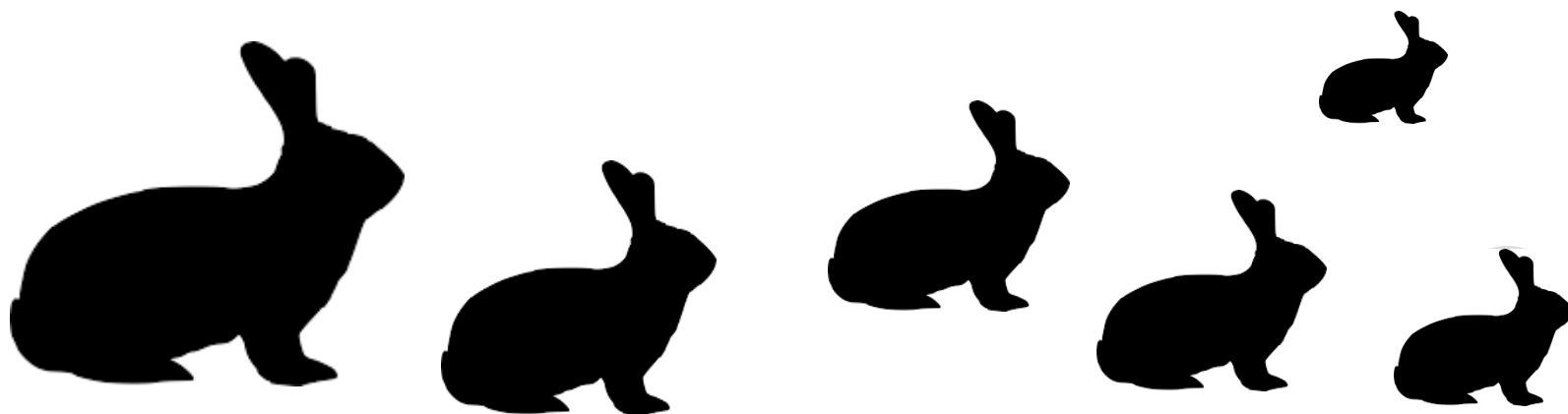


Funkcja opisująca zmiany stanu populacji, może uwzględniać szereg czynników takich jak: rozrodczość, śmiertelność, imigrację, emigrację



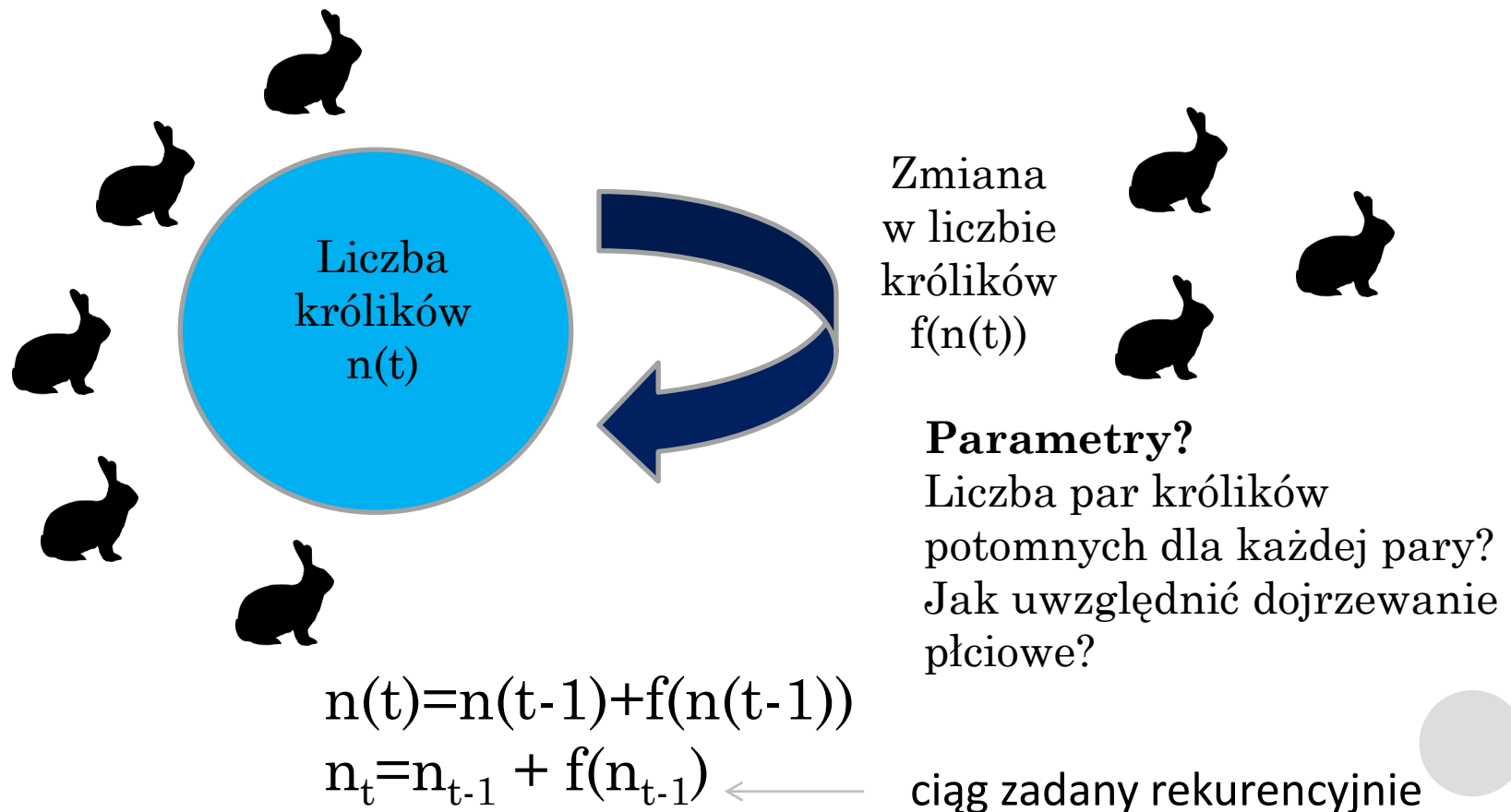
WZROST POPULACJI KRÓLIKÓW

- Ile par królików może spłodzić jedna para w ciągu roku, jeśli:
 - Parę nowonarodzonych, samca i samicę zdolnych do reprodukcji, izolujemy i zapewniamy dostateczną ilość pokarmu dla wszystkich jej potomków, przyjmując że żaden osobnik nie ginie
 - Pierwsza i każda następna para osiąga dojrzałość po jednym miesiącu a po dwóch mają już potomstwo, też samca i samicę
- Problem opisany przez Leonardo Fibonaciego (*Leonardo Pisano Bigollo*; ok. 1175-1250) ale ciąg fibonacciego był znany już w starożytności



BUDOWA MODELU

- Zdefiniowanie zmiennych oraz parametrów



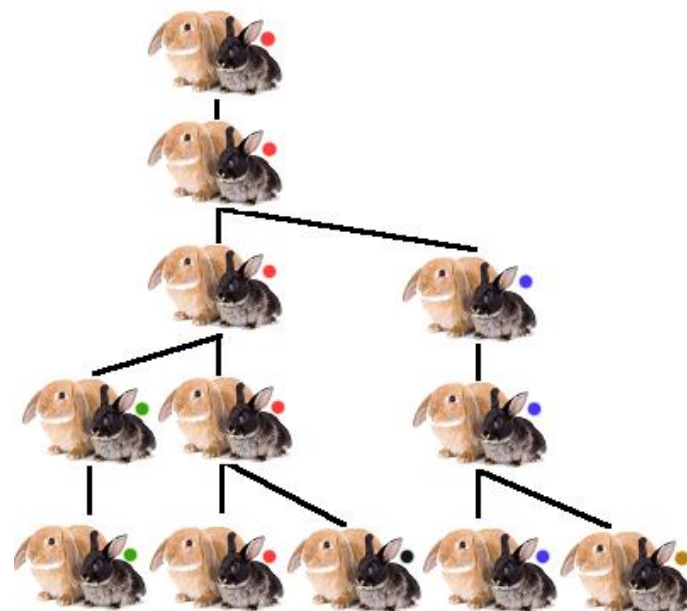
CO MA WSPÓLNEGO CIĄG FIBONACCIEGO Z PARĄ KRÓLIKÓW?

- Ile par królików wyhodujemy po roku?

Miesiące t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n(t)	1	1										

Para
nowonarodzonych
królików

Para dojrzałych
płciowo królików
mogących mieć
potomstwo w
następnym miesiącu



PODSTAWY MATEMATYCZNE

CIAŁO

- Lista ponumerowanych elementów pewnego zbioru
- **Ciąg** to dowolna funkcja, której argumentami są liczby naturalne
 - **Wyraz ciągu** – element ciągu, jedna z liczb
 - **Wzór ogólny ciągu** – reguła według której powstaje ciąg, np.

$$a_n = 2n^2 + 1$$

- Ciąg może być:
 - nieskończony – argumentami funkcji są wszystkie liczby naturalne dodatnie
 - skończony – funkcja jest zdefiniowana dla kolejnych liczb mniejszych lub równych pewnej liczbie n



PODSTAWY MATEMATYCZNE

CIĄG

○ Ciągi zadane rekurencyjnie

- Ciągi zadane za pomocą pewnej zależności (funkcji), która określa $(n+1)$ -szy wyraz ciągu, jeżeli znamy n -ty wyraz

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

- Funkcja f określa prawo, według którego jakiś układ przechodzi od stanu a_n do stanu a_{n+1} w jednym kroku czasowym

○ Monotoniczność ciągu:

- Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem rosnącym, jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} > a_n$
- Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem malejącym, jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} < a_n$.
- Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem stałym, wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} = a_n$.



PODSTAWY MATEMATYCZNE

CIĄG

- **Arytmetyczny** – każda kolejna liczba różni się od poprzedniej o ustaloną wartość r

- Zadany rekurencyjnie przez funkcję $f(x)=x+r$

$$a_{n+1} = a_n + r$$

gdzie r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego

- **Geometryczny** – każda kolejna liczba różni się od poprzedniej q razy

- Zadany rekurencyjnie przez funkcję $f(x)=qx$

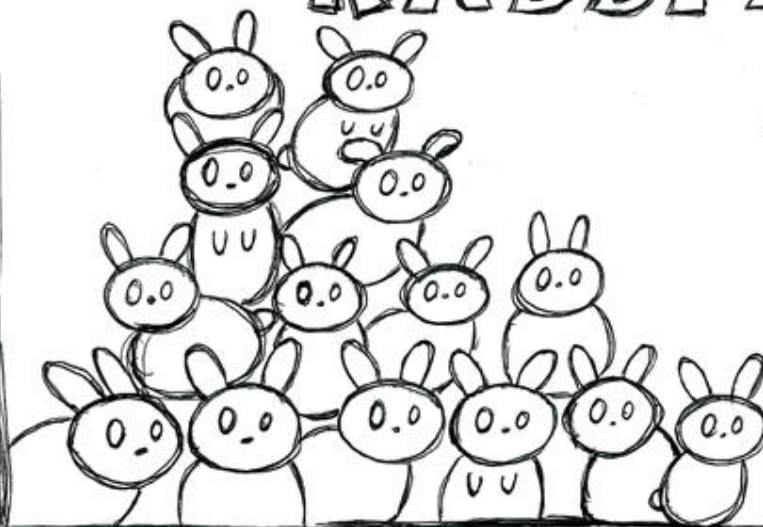
$$a_{n+1} = qa_n$$

gdzie q nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego



FROM THE CREATIVE MINDS WHO BROUGHT YOU PAVLOV'S DOG
AND SCHRÖDINGER'S CAT IT'S...

THE FIBONACCI RABBITS



PAY ONLY
19.99

FOR THE FIRST TWO
~~BUT WAIT~~
THERE'S MORE!

YOU PAY FOR ONLY
TWO, BUT WATCH
AS THE NUMBERS
GROW RIGHT BEFORE
YOUR EYES!

CIĄG FIBONACCIEGO

- Kolejne liczby są tworzone przez dodanie do siebie dwóch poprzednich wyrazów ciągu
- Wzór rekurencyjny:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{array} \right.$$

warunki początkowe

równanie różnicowe

Uwaga!

Według niektórych matematyków ciąg zaczyna się od 0, wtedy $F_1=0$, $F_2=1$; $F_3=1$; ...

- Rozwiązaniem jest ciąg liczb spełniający równanie rekurencyjne z warunkiem początkowym. Równanie to jest równaniem liniowym dla którego rozwiązaniem jest:

$$f_n = \lambda^n$$

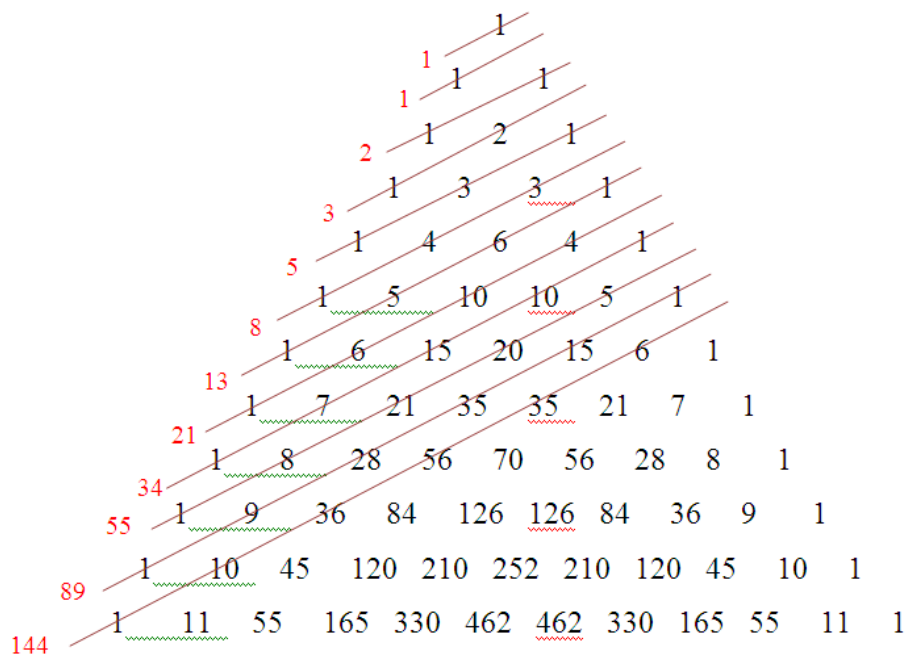
gdzie λ jest parametrem, który trzeba wyznaczyć

CIĄG FIBONACCIEGO

- Ile par królików może spłodzić jedna para w ciągu roku? A ile po dwóch latach?
- Rozwiązanie równania Fibonacciego:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Trójkąt Pascala

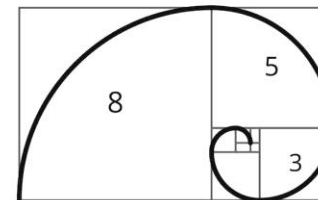


ZŁOTA PROPORCJA

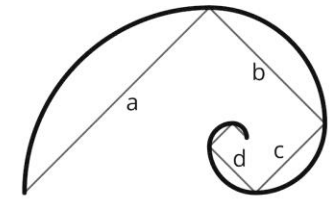
- Ciąg ilorazów kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego

$$b_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \varphi \approx 1,61803$$

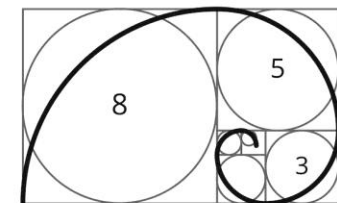
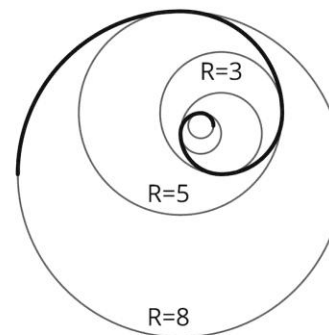
f_n	f_{n+1}	f_{n+1} / f_n
2	3	1,5
3	5	1,666666
5	8	1,6
8	13	1,625
...	...	...
144	233	1.618055
233	377	1.618025
...	...	...



Fibonacci:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...



$$\frac{a+b}{a} \approx \frac{b+c}{b} \approx \frac{c+d}{c} \approx 1,618$$

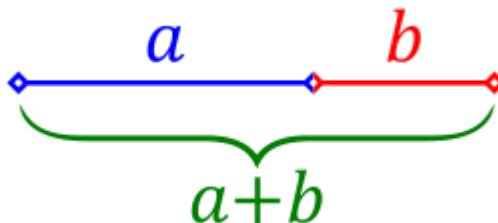


SECTIO AUREA
Gold section proportion

ZŁOTA PROPORCJA

- Stała oznaczona przez φ jest zwana liczbą złotego podziału – stosunek długości odcinków złotego podziału
 - Dłuższa część odcinka ma się do krótszej tak, jak całość do dłuższej części

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

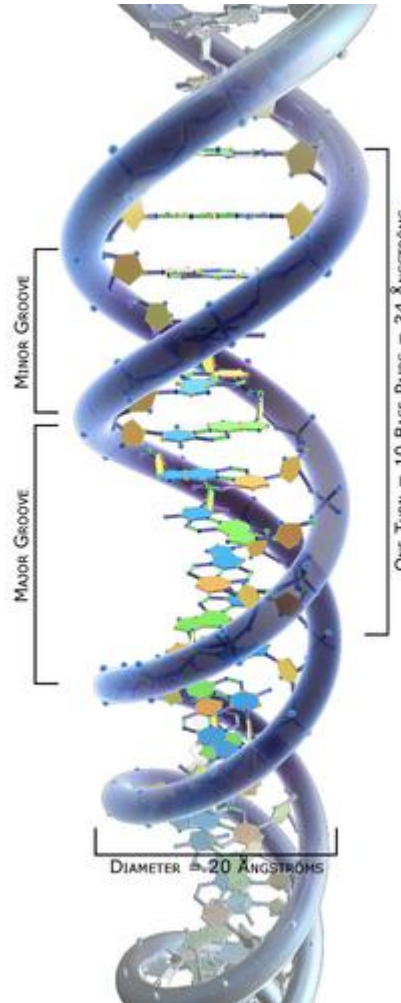


CIĄG FIBONACCIEGO W NATURZE

Proporcje w odległościach i sposobie ułożenia nasion słonecznika

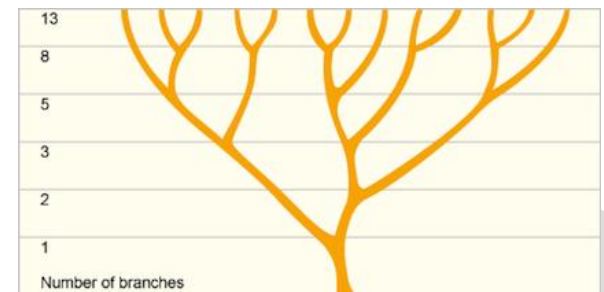
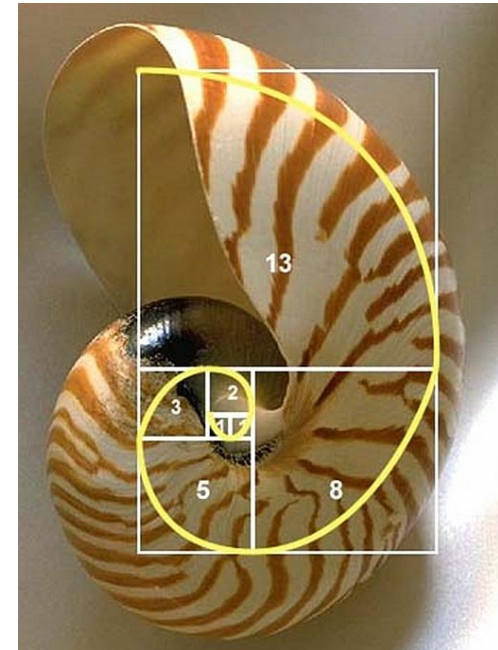


Galaktyka spiralna M51



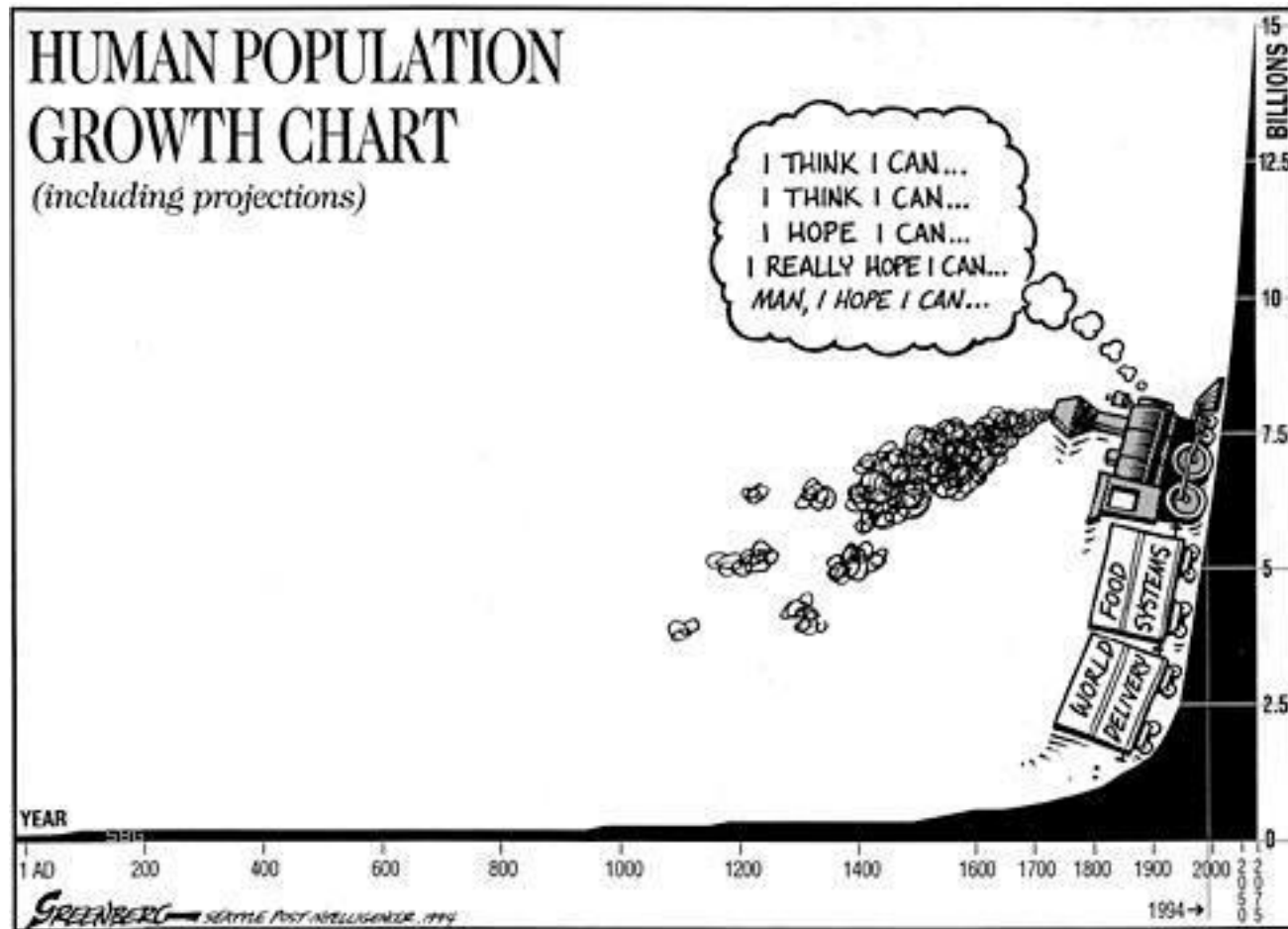
Wymiary cząsteczki DNA
(34 angstromy dł i 21 szer)

Muszla łodzika



Gałęzie drzew

WZROST POPULACJI



Jak szybki jest przyrost populacji ludzkiej?

Jaki model matematyczny najlepiej oddaje dotychczasowe tempo wzrostu?

Jaki model matematyczny daje najbardziej wiarygodne predykcje?

RÓWNANIE MALTHUSA

- Thomas Malthus

- angielski ekonomista i demograf
- pod koniec XVIII wieku zwrócił uwagę na zbyt szybki przyrost liczebności populacji ludzkiej



- W pracy zatytułowanej „An Essay on the Principle of Population” sformułował prawo, które mówi, że:
 - liczba ludności wzrasta w tempie geometrycznym
 - zasoby żywności wzrastają w tempie arytmetycznym

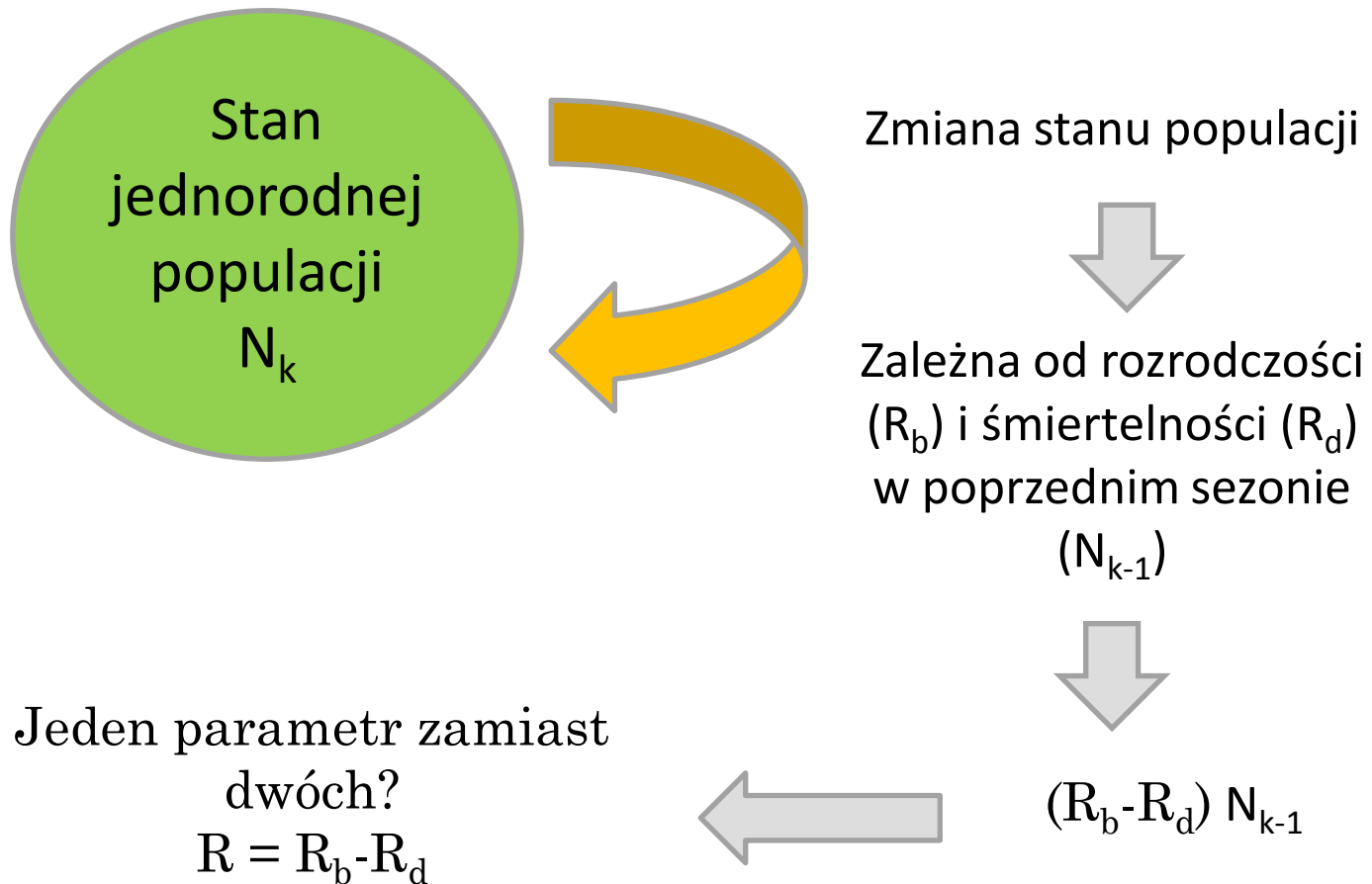


ZAŁOŻENIA MODELU

- W środowisku występuje **jeden gatunek** a jego **zasoby są nieograniczone**
- **Populacja jest jednorodna**, brak podziału na klasy wiekowe, równy udział płci
- Gatunek rozmnaża się sezonowo, **jeden raz w roku/sezonie**, a młode są zdolne do rozrodu jeszcze w tym samym roku/sezonie
- Liczby $x_1, x_2, x_3 \dots$ oznaczają liczebności populacji samic w kolejnych latach
- Na stan populacji w $(n+1)$ -szym roku wpływa jedynie **śmiertelność i rozrodczość w poprzednim sezonie**



PARAMETRY MODELU



PARAMETRY MODELU

- R_b – współczynnik reprodukcji – liczba potomków wydanych w ciągu sezonu, przypadających średnio na jednego osobnika
- R_d – współczynnik śmiertelności – liczba osobników, które nie przeżyły jednego sezonu
- Zakładamy, że R_b oraz R_d są stałe
 - Nie są zależne od zagęszczenia
 - Nie zmieniają się w kolejnych krokach czasowych

Przez **R** oznaczmy **współczynnik wzrostu populacji** oznaczający różnicę pomiędzy współczynnikiem reprodukcji i śmiertelności



ZAPIS MATEMATYCZNY MODELU

$$N(k+\tau)=N(k)+ R_b\tau N(k)- R_d\tau N(k)$$

zakładając, że krok czasowy wynosi $\tau = 1$

$$N(k+1)=(1+ R_b - R_d)N(k)$$

a więc

$$N(k+1)=(1+R) N(k)$$

$$N(k+1)=\lambda N(k)$$

- Parametry modelu, których wartości ustala się empirycznie to λ (R_b , R_d), N_0



ZMIANY ZAGĘSZCZENIA POPULACJI

- Rozwiązaniem jest ciąg geometryczny:

$$N_k = N_0(1+R)^k$$

- Jeżeli $\lambda = 1 + R > 1$

- Stan populacji rośnie wykładniczo do nieskończoności

- Jeżeli $0 < \lambda = 1 + R < 1$

- Stan populacji spada do zera

- Współczynnik wzrostu populacji *per capita* (na jednego osobnika) można wyrazić za pomocą różnicy w stanach populacji w kolejnych krokach czasowych jako:

$$R = \frac{N_{k+1} - N_k}{N_k}$$



RÓWNANIE MALTHUSA

- Geometryczny wzrost populacji – model z czasem dyskretnym

$$N_k = N_0 \lambda^k$$

gdzie λ to geometryczne tempo wzrostu - średnia liczba potomstwa pozostawiona przez jednego osobnika w jednym kroku czasowym

$\lambda = 1+R$ jeżeli uwzględniamy rozród i śmiertelność

$\lambda = 1+R_b$ w uproszczonym modelu jeżeli uwzględniamy wyłącznie rozród



ROZSZERZONY MODEL

- Uwzględniamy migrację:

$$R = R_b - R_d + R_i - R_e$$

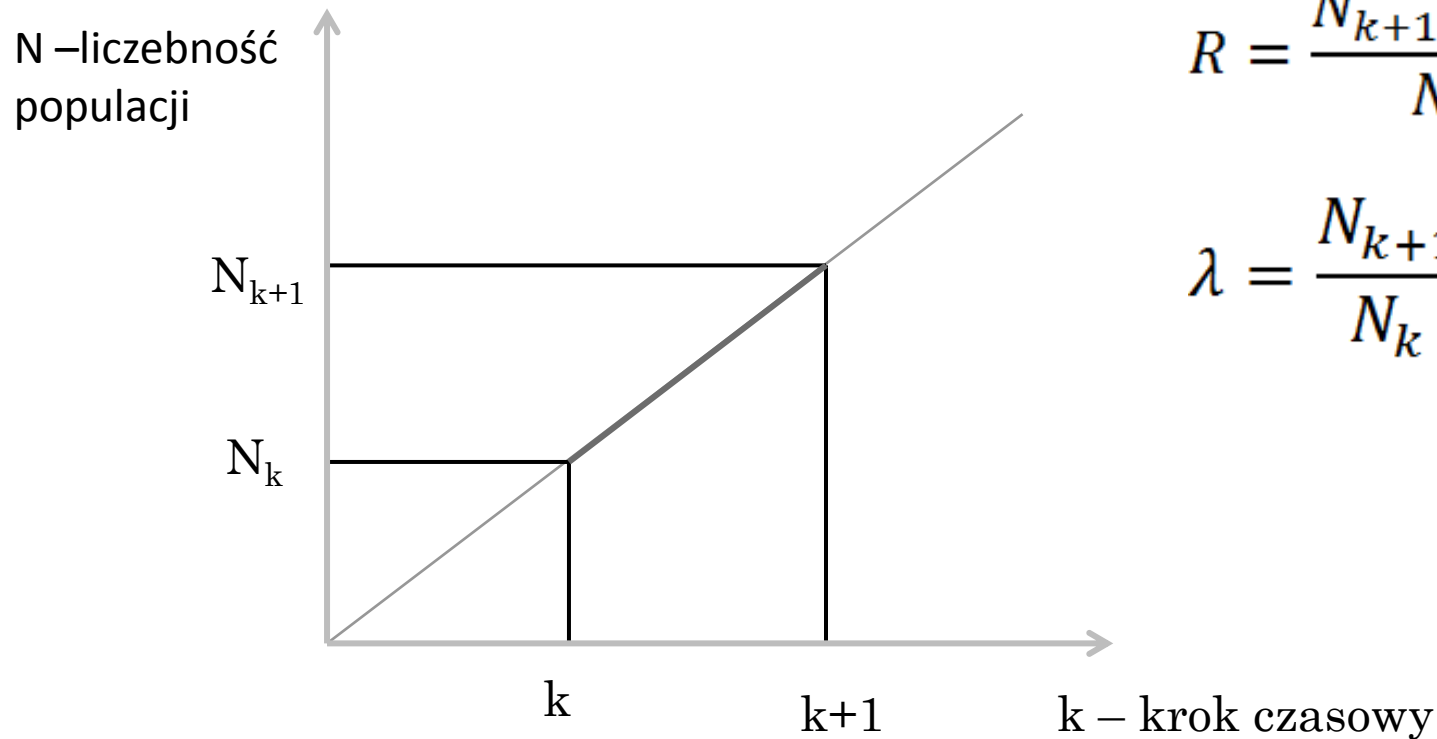
- Gdzie:

- R_i – stałe w czasie tempo imigracji
- R_e – stałe w czasie tempo emigracji

$$\lambda = 1 + R = 1 + (R_b - R_d + R_i - R_e)$$

- Model nie uwzględnia nakładających się pokoleń
 - stosowane są średnie wartości $R_b - R_d$, niezależnie od wieku osobnika
 - Uwzględnienie struktury wieku wymaga zastosowania **modeli macierzowych**

WZROST GEOMETRYCZNY



$$R = \frac{N_{k+1} - N_k}{N_k}$$

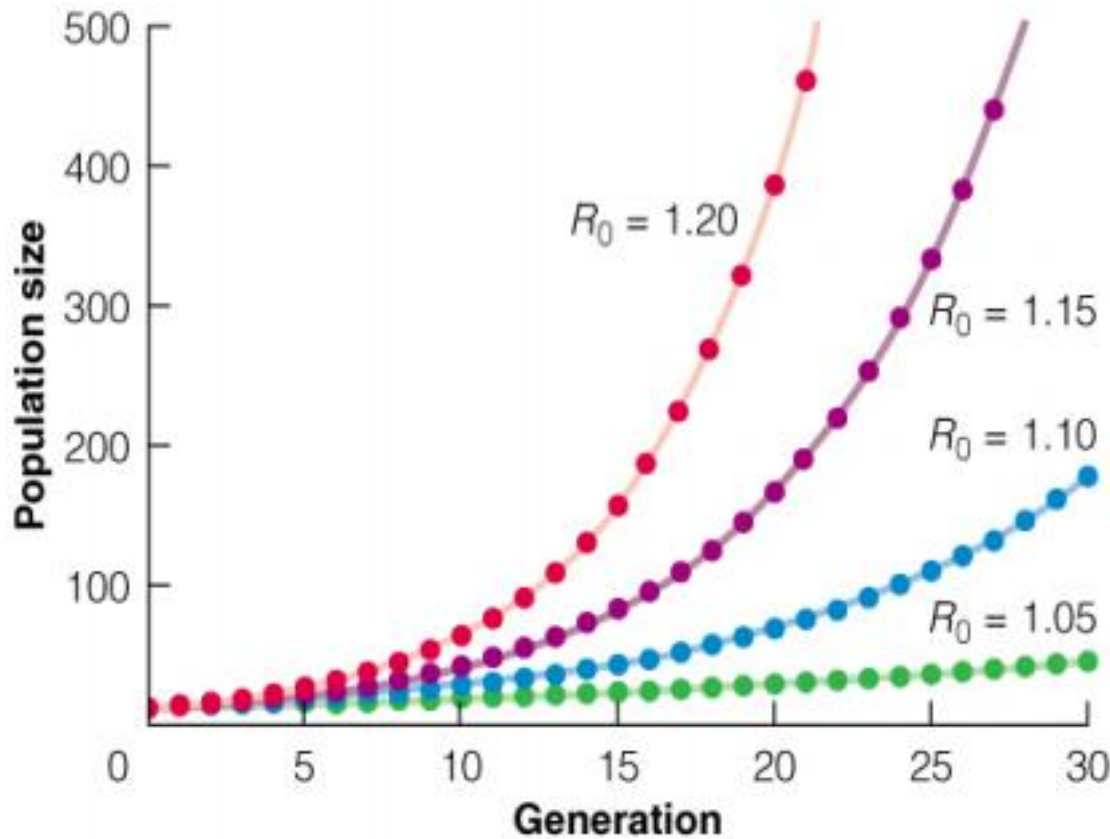
$$\lambda = \frac{N_{k+1}}{N_k}$$

λ = geometryczne tempo wzrostu

Wielkość populacji w kroku czasowym k może być oszacowana ze wzoru ogólnego:

$$N_k = N_0 \lambda^k \text{ lub } N_k = \lambda N_{k-1}$$

RÓWNANIE MALTHUSA – MODEL Z CZASEM DYSKRETNYM



Wyższe wartości λ
prowadzą do szybszego
wzrostu populacji

Uwaga na oznaczenia:
 $R_0 = \lambda$

(Krebs, 2001)

WZROST GEOMETRYCZNY

- Oszacuj tempo wzrostu (λ) populacji I i II
- Jaki będzie stan populacji w 12 pokoleniu?

k	N_k (I)	N_k (II)
0	10	10
1	12	15
2	14	23
3	17	34
4	21	51
5	25	76
6	30	114
7	36	171
8	43	256
9	52	384
10	62	577
11	x	x
12	x	x

$$R = \frac{N_{k+1} - N_k}{N_k}$$

$$\lambda = \frac{N_{k+1}}{N_k}$$

$$N_{k+1} = (1+R) N_k$$

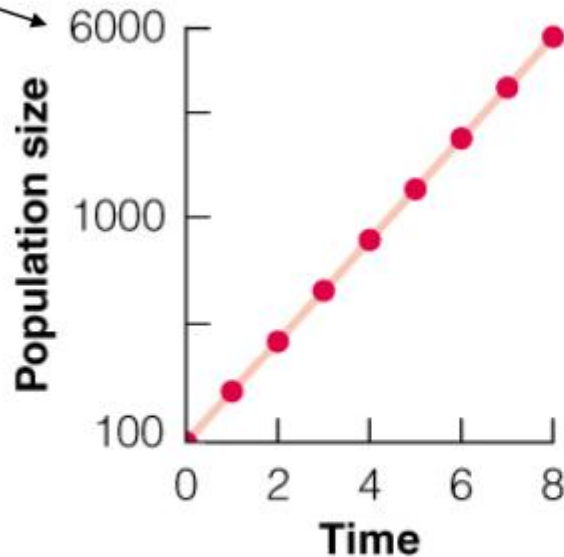
$$N_k = N_0 \lambda^k$$



WZROST GEOMETRYCZNY

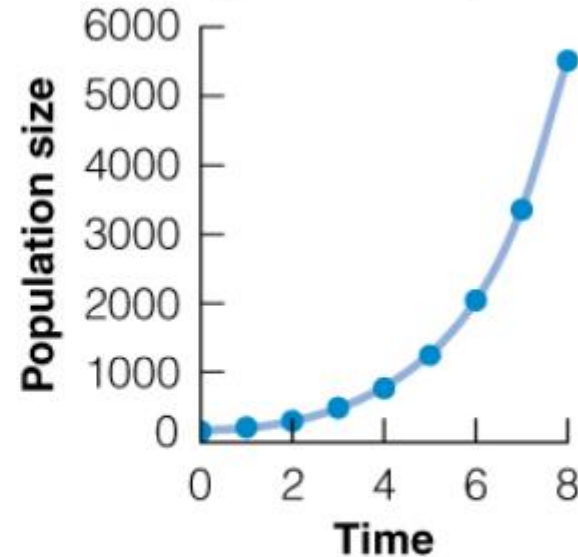
SKALA LOGARYTMICZNA

Logarithmic
scale



(a) Logarithmic scale

Linear (arithmetic) scale



(b) Arithmetic scale

© Copyright 2001 by Benjamin Cummings, an imprint of Addison Wesley Longman.

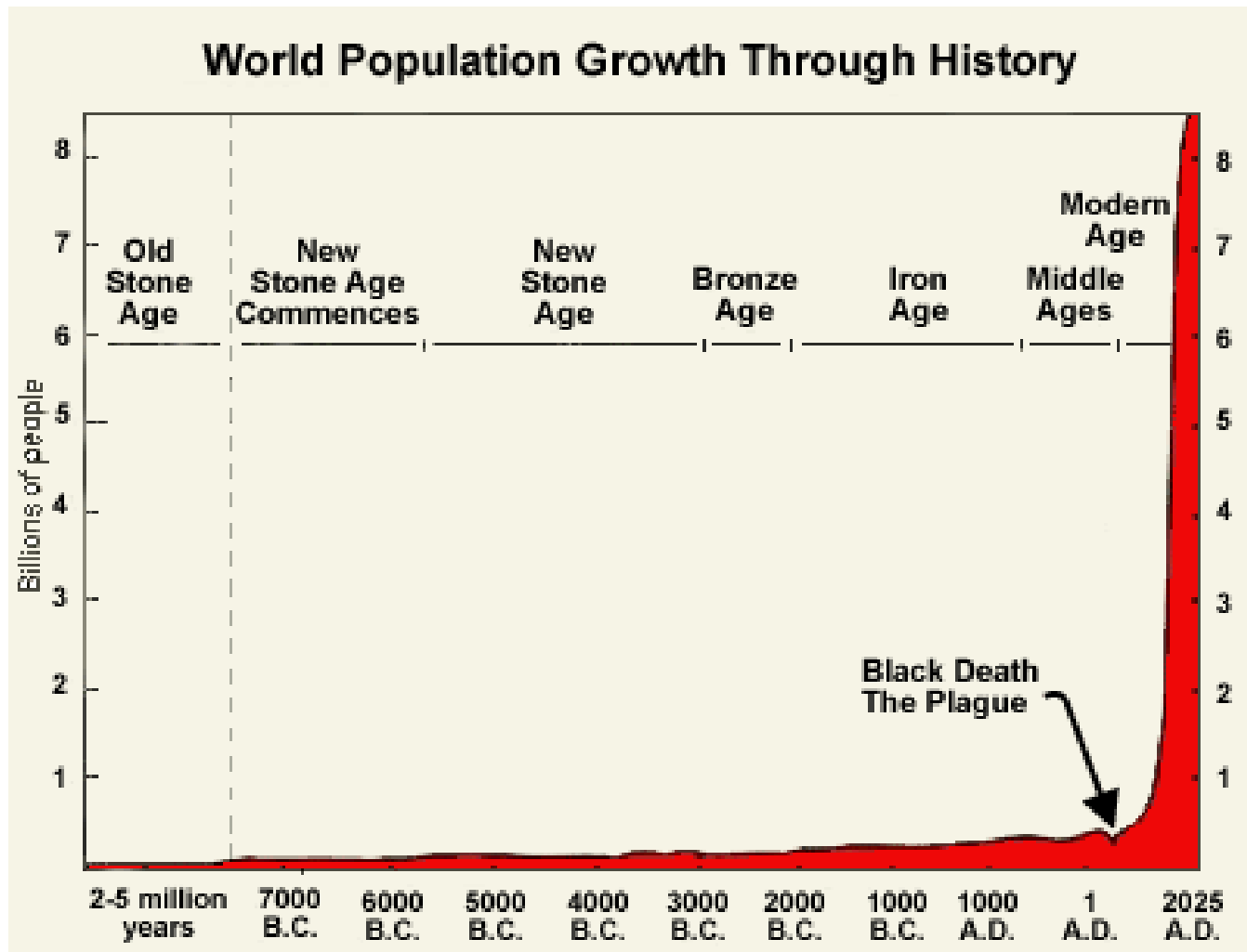
(Krebs, 2001)

MODEL Z CZASEM DYSKRETNYM

- Kiedy możemy stosować model z czasem dyskretnym?
 - Opis populacji organizmów rozmnażających w ciągu krótkiego czasu w ciągu roku
 - Brak nakładających się na siebie pokoleń
- Jeżeli reprodukcja przebiega w sposób ciągły, należy:
 - przyjąć **model z czasem ciągłym** – wykorzystanie równań **różniczkowych**
 - Uśredniamy współczynniki R_b i R_d po całym kroku czasowym Δt
 - Uwaga! zmniejszamy dokładność przewidywania!



MODEL Z CZASEM CIĄGŁYM CZY CZASEM DYSKRETNYM?



(Krebs, 2001)

Tempo wzrostu populacji ludzkiej było szybsze niż wykładnicze, obecnie spowalnia



DANIA



FINLANDIA



ŁOTWA



FEDERACJA ROSYJSKA



IRLANDIA



FRANCJA



NIEMCY



POLSKA



HISZPANIA



WĘGRY



BUŁGARIA



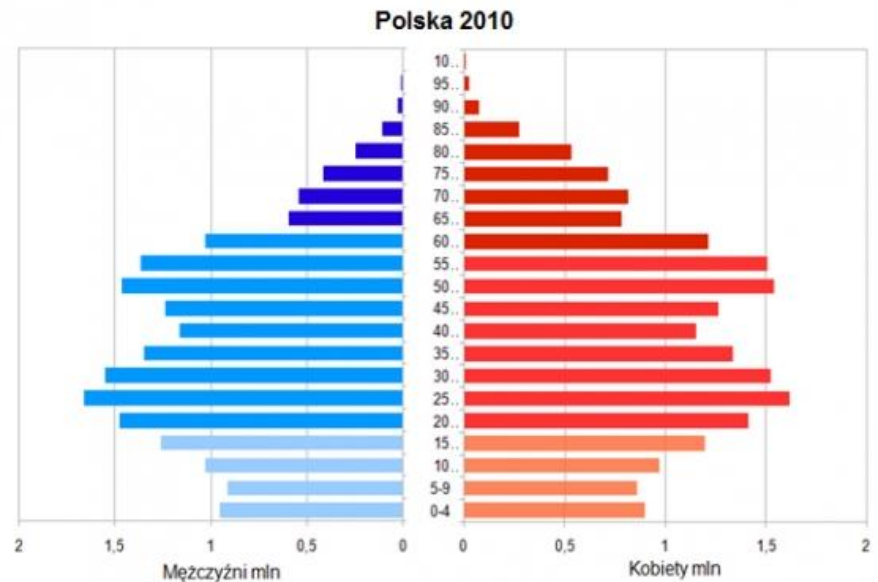
TURCJA

MODELE ROZWOJU POPULACJI Z UWZGLĘDNIENIEM WIEKU

Dr Wioleta Drobik-Czwarno

MODELE ZE STRUKTURĄ WIEKU

- Wiek jest cechą różnicującą osobniki i mającą wpływ na ich wkład do populacji
- Osobniki bardzo młode i bardzo stare:
 - mają znikomy wkład w reprodukcję
 - charakteryzują się zwiększoną śmiertelnością



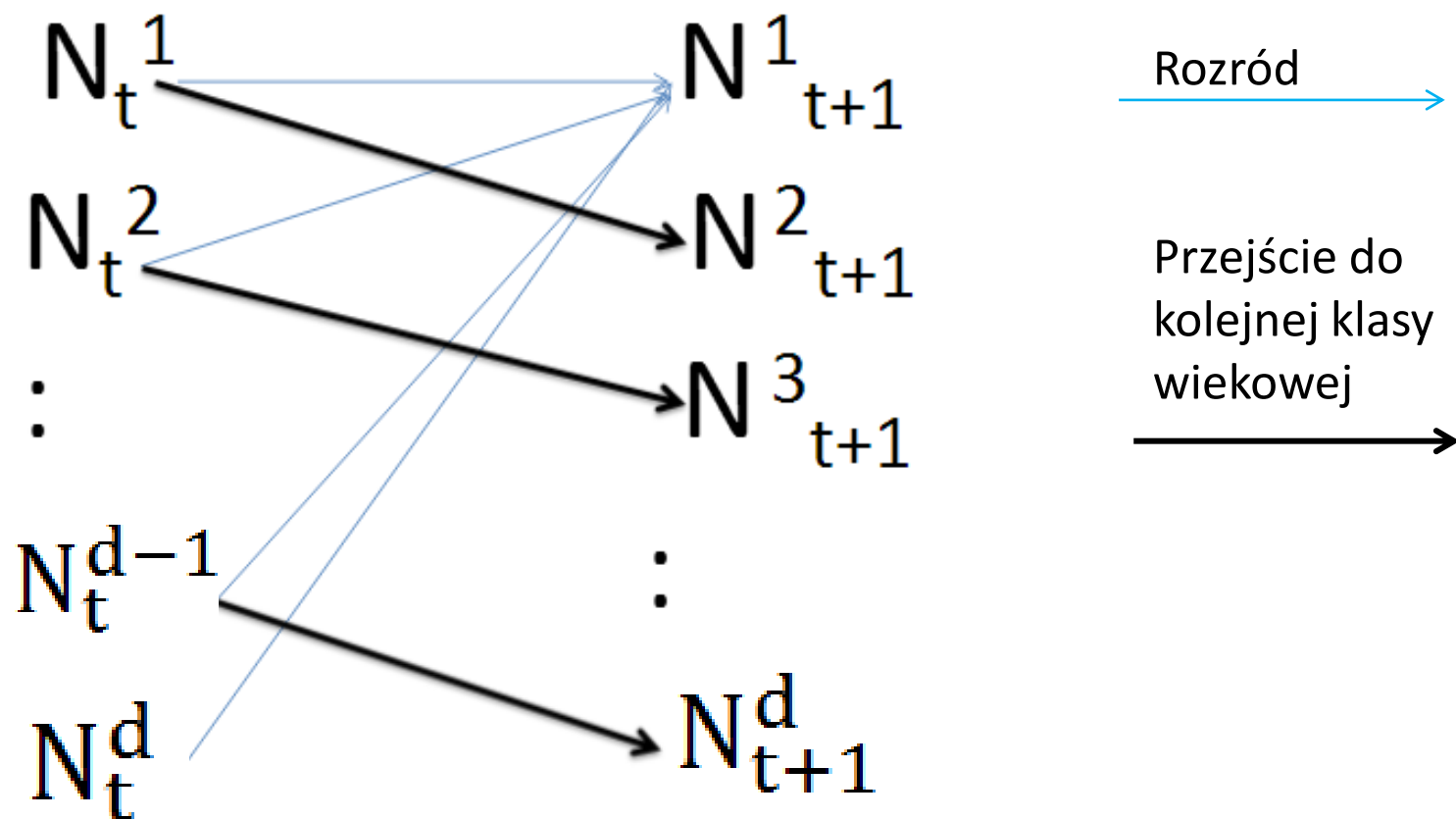
<http://ziemianarozdrozu.pl/artukul/2368/swiat-na-rozdrodu-wykresy-rodzial-4-piramida>

MODELE ZE STRUKTURĄ WIEKU

- Wyróżniamy d kolejnych klas wieku: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{d-1}$ o równej długości
- W jednym kroku czasowym (pokoleniu), o długości równej długości klasy, każdy osobnik może przejść do późniejszej klasy wiekowej lub zginąć
- Założenia:
 - Wiek osobników zmienia się w sposób dyskretny
 - Każda klasa wiekowa jest jednorodna
 - Klasy różnią się śmiertelnością i rozrodczością
 - Wszystkie osobniki z ostatniej klasy wiekowej giną



SCHEMAT ZMIAN LICZEBNOŚCI POPULACJI



POPULACJA PODZIELONA NA KLASY WIEKOWE

- Zakładamy, że poziom reprodukcji i śmiertelności zależy jedynie od wieku osobników
- Pierwsza klasa zawiera tylko osobniki młode – jej rozmiar zależy wyłącznie od poziomu reprodukcji grup rodzicielskich:

$$n(1, t + 1) = f(1) \cdot n(1, t) + \dots + f(d) \cdot n(d, t) = \sum_{x=1}^d f(x) \cdot n(x, t)$$

gdzie:

d – liczba grup wiekowych (klas wieku)

t – czas (pokolenie)

$f(x)$ – poziom reprodukcji grupy wiekowej x

$n(x, t)$ – liczebność grupy wiekowej x w pokoleniu t



POPULACJA PODZIELONA NA KLASY WIEKOWE

- Rozmiar kolejnych klas wiekowych w roku następnym zależy od liczebności i przeżywalności w niższej klasie wiekowej:

$$n(x+1, t+1) = P(x) \cdot n(x, t) \Leftrightarrow x > 1$$

gdzie:

x – grupa wiekowa

t – czas (pokolenie)

$n(x, t)$ – liczebność grupy wiekowej x w pokoleniu t

$P(x)$ – śmiertelność w grupie wiekowej x



STRUKTURA POPULACJI

- Struktura populacji opisana jest za pomocą wektora, gdzie $n(x,t)$ oznacza liczebność określonej grupy wiekowej x w pokoleniu t

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} n(1,t) \\ n(2,t) \\ \vdots \\ M \\ \vdots \\ M \\ n(d,t) \end{pmatrix}$$

$n(1,t)$ = osobniki nowonarodzone

$n(d,t)$ = osobniki najstarsze



STRUKTURA POPULACJI W KOLEJNYM POKOLENIU

- Strukturę populacji w kolejnym pokoleniu można otrzymać przez pomnożenie powyższego wektora przez macierz **L** zwaną macierzą projekcji lub **macierzą Lesliego**
- Macierz **L** zawiera informację o poziomie reprodukcji $f(x)$ i przeżywalności $P(x)$ w poszczególnych klasach:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \Lambda & \Lambda & f(d) \\ P(1) & 0 & & & 0 \\ 0 & P(2) & & & M \\ M & & 0 & & M \\ 0 & \Lambda & \Lambda & P(d-1) & 0 \end{pmatrix}$$

**Model macierzowy
Lesliego:**

$$\mathbf{n}(t+1) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}(t)$$



WEKTOR A MACIERZ

- Wektor – jednokolumnowa macierz

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Macierz prostokątna A o m wierszach i n kolumnach, oznaczaną $[a_{ij}]_{m \times n}$:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

MNOŻENIE MACIERZY

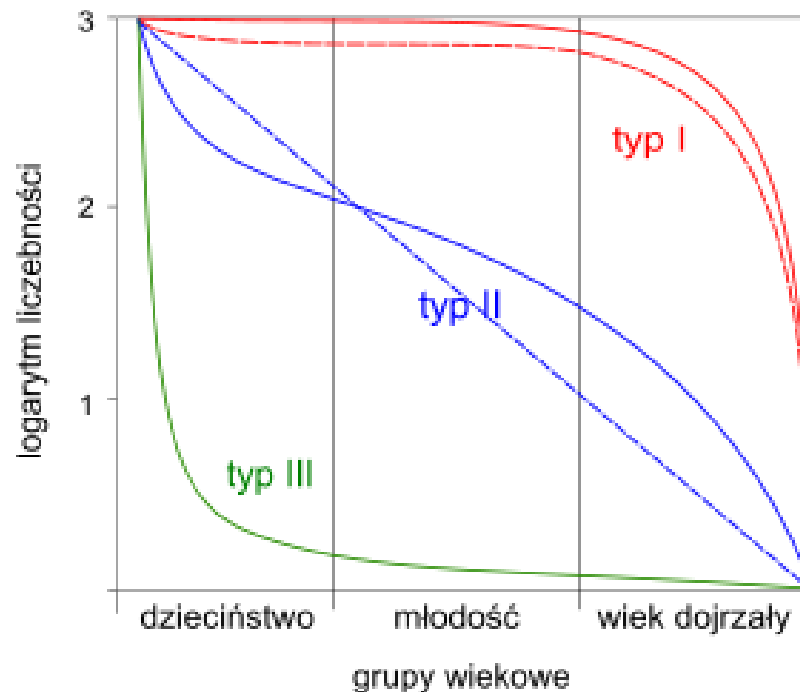
- Mnożenie macierzy przez wektor kolumnowy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} :=$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{bmatrix}$$

KRZYWE PRZEŻYWALNOŚCI

- Krzywe przeżywalności – funkcja opisująca liczbę osobników, które dożywają do określonego wieku jeśli znana jest początkowa liczebność grupy wiekowej (kohorty)



PRZYKŁAD 1

Struktura wiekowa populacji wraz ze współczynnikami reprodukcji oraz przeżywalności

	jednoroczne	dwuletnie	trzyletnie
Liczebność początkowa	100	100	100
Poziom reprodukcji	1	1	1
Przeżywalność	0,8	0,5	0



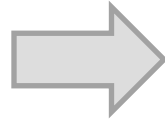
PRZYKŁAD 1

Macierz Lesliego (projekcji)



- Rozwiązanie:

Liczebności
poszczególnych
klas wiekowych



$$\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + 100 + 100 \\ 80 + 0 + 0 \\ 0 + 50 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 80 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 300 \\ 80 \\ 50 \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} 300 \\ 80 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 + 80 + 50 \\ 240 + 0 + 0 \\ 0 + 40 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 430 \\ 240 \\ 40 \end{bmatrix}$$

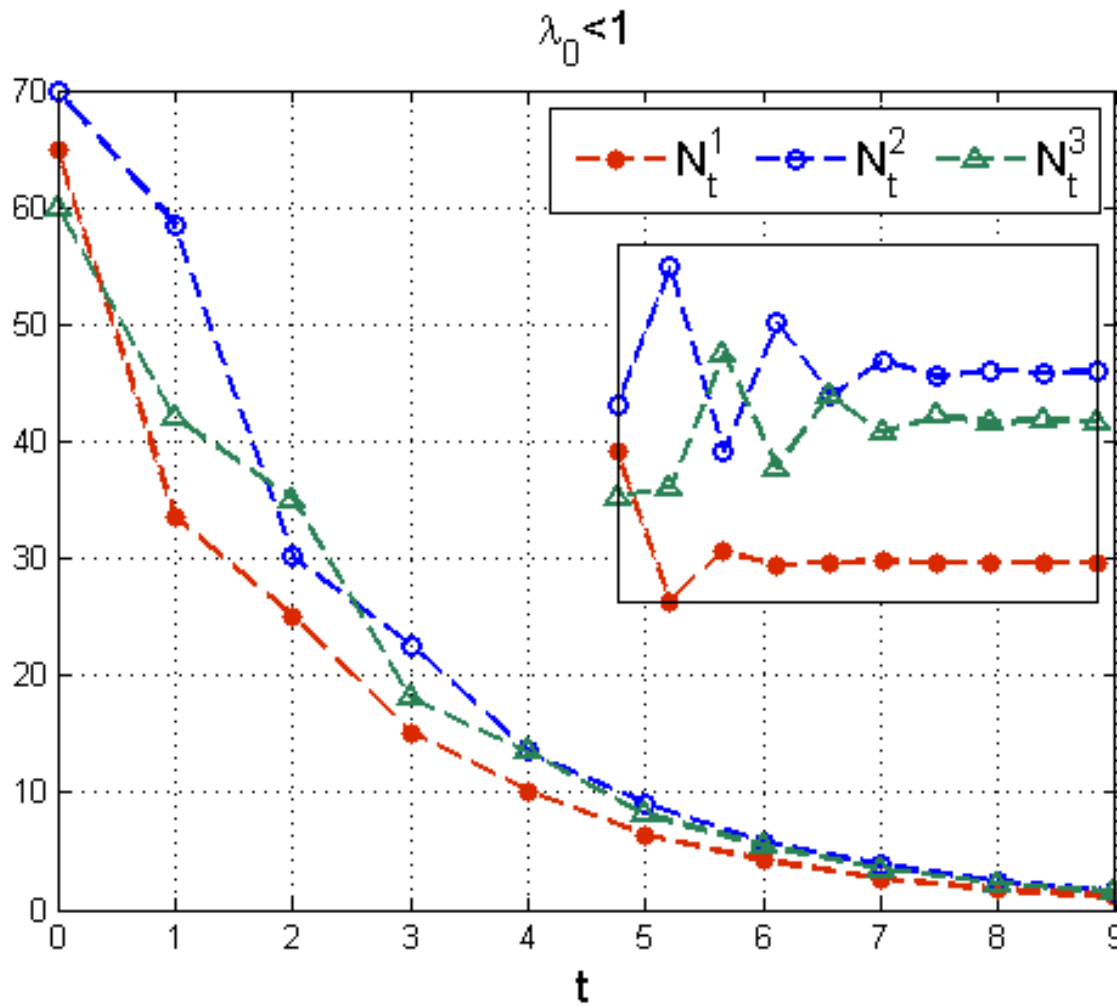


CO DALEJ?

- Własności rozwiązań zależą od postaci macierzy Lesliego oraz początkowego rozkładu wieku
- Przyszłość populacji możemy poznać stosując do niej twierdzenie Perrona-Frobeniusa:
 - Największa wartość własna rzeczywistej nieujemnej kwadratowej macierzy jest rzeczywista i ma krotność 1
 - Wektor własny korespondujący z tą wartością własną jest ściśle dodatni
- Dla większości warunków początkowych populacja asymptotycznie osiąga rozkład wieku V_0 przy współczynniku rozrodczości λ_0



POPULACJA WYMIERAJĄCA



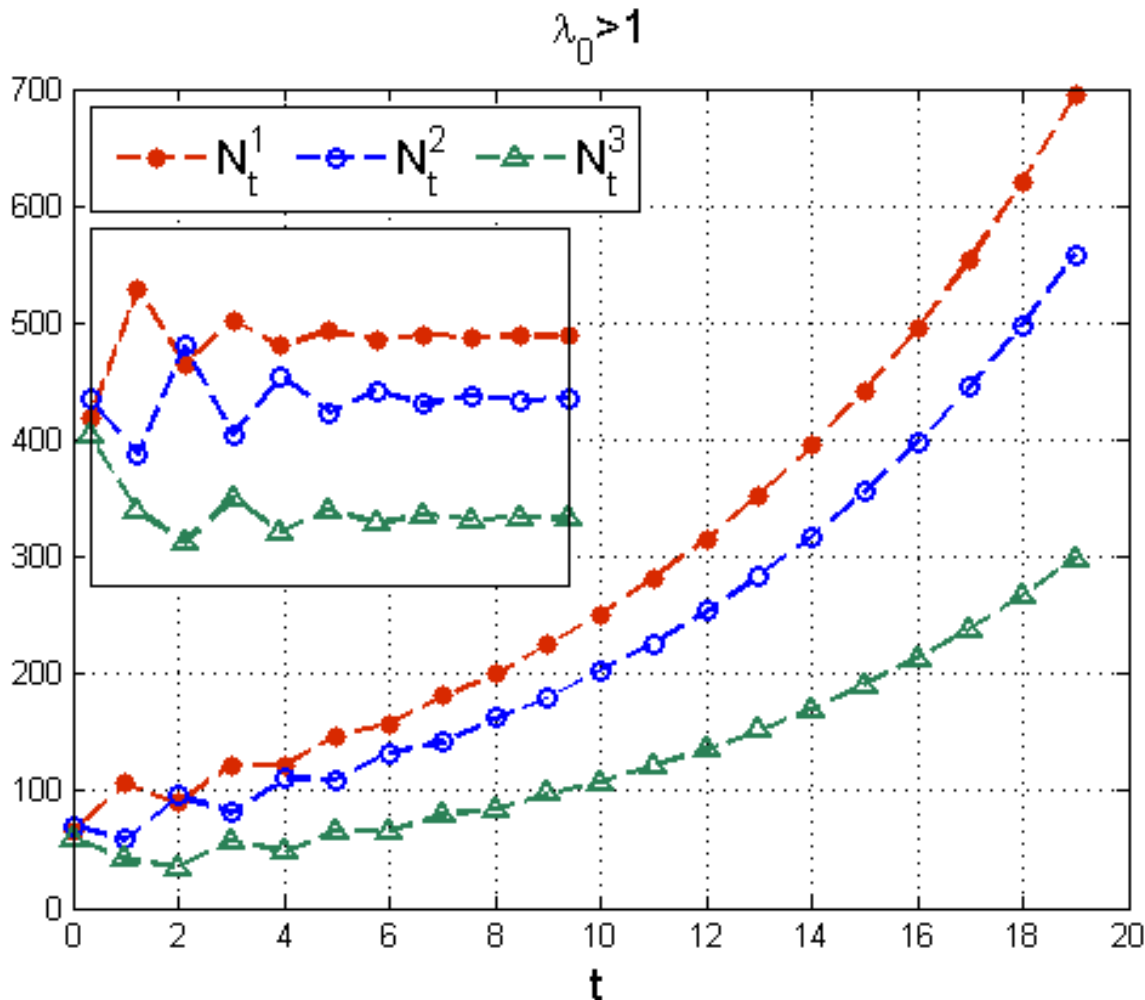
Tempo wzrostu
populacji:

$$r = \lambda = \frac{N_{t+1}}{N_t}$$

Populacja podzielona
na trzy grupy wiekowe
w zależności od
dominującej wartości
własnej λ_0

Wstawki pokazują
ewolucję
procentowego udziału
poszczególnych grup
wiekowych w całości
populacji

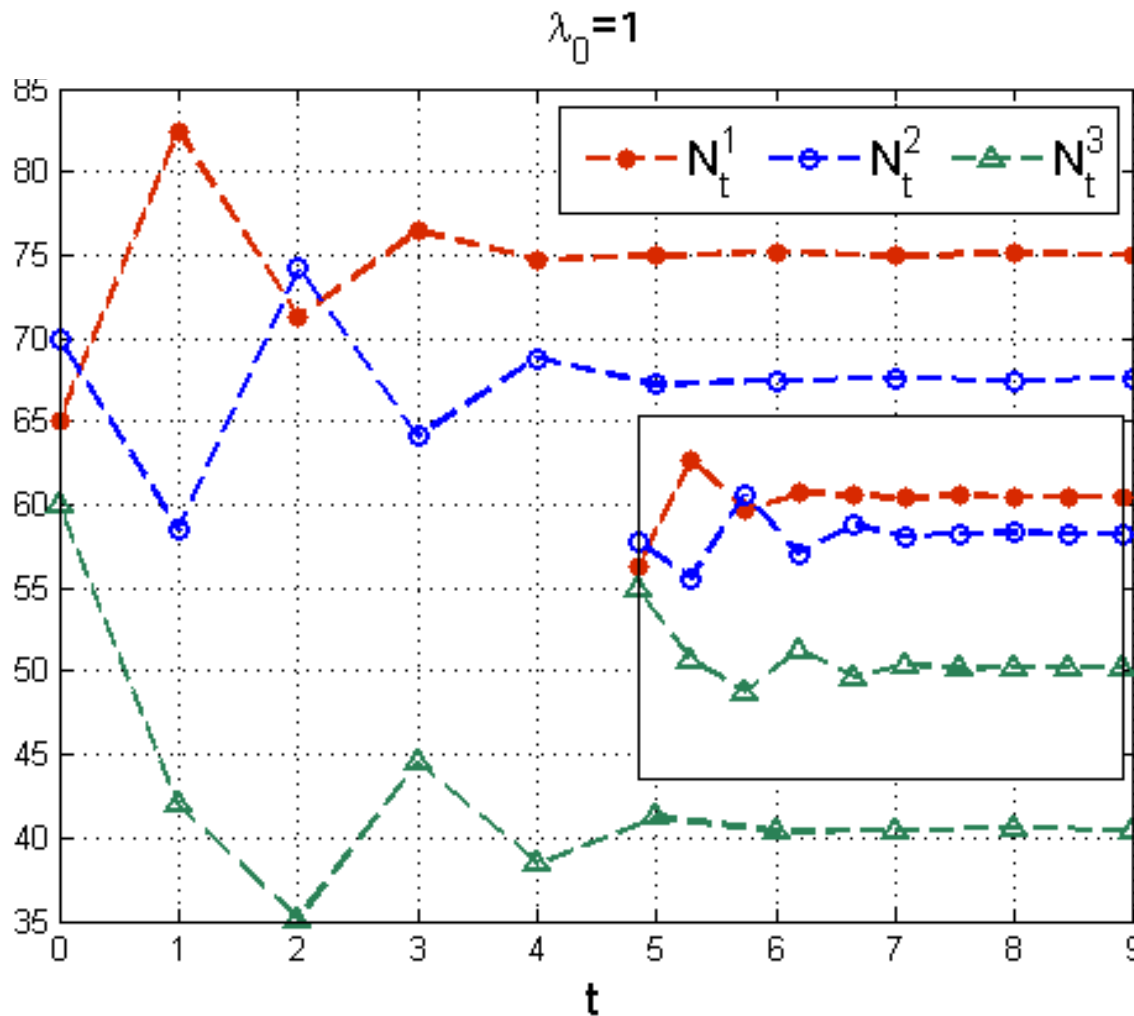
POPULACJA ROZWOJOWA



Populacja podzielona na trzy grupy wiekowe w zależności od dominującej wartości własnej λ_0

Wstawki pokazują ewolucję procentowego udziału poszczególnych grup wiekowych w całości populacji

POPULACJA STACJONARNA

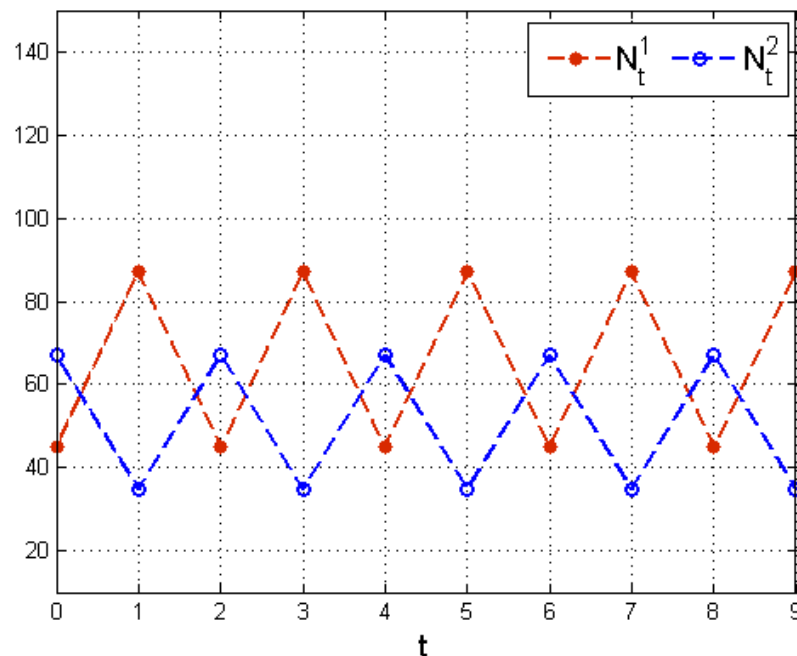


Populacja podzielona na trzy grupy wiekowe w zależności od dominującej wartości własnej λ_0

Wstawki pokazują ewolucję procentowego udziału poszczególnych grup wiekowych w całości populacji

WŁAŚCIWOŚCI MODELU

- W większości warunków początkowych populacja asymptotycznie osiąga stały rozkład wieku
- Możliwe są także cykliczne zmiany struktury wieku
 - Z sytuacją taką mamy do czynienia gdy mamy tylko dwie grupy wiekowe, a rozmnażają się tylko osobniki starsze



WŁAŚCIWOŚCI MODELU

- Wymaga dużej ilości danych
 - Specyficzne dla wieku wskaźniki przeżywalności i rozrodu
- Nie uwzględnia podziału na płeć
- Nie uwzględnia istnienia stadiów rozwojowych
 - nie wszystkie osobniki opuszczają daną klasę wiekową
 - stadia rozwojowej wyróżniamy np. u owadów



PRZYKŁAD 2

Przedstaw na wykresie zmiany w strukturze wiekowej populacji o poniższej strukturze wejściowej na przestrzeni 5 kolejnych pokoleń

	jednoroczne	dwuletnie
Liczebność początkowa	100	50
Poziom reprodukcji	0	0,8
Przeżywalność	0,7	0



PRZYKŁAD 3. JAK ZMIENIA SIĘ POPULACJA SZARAŃCZY W CZASIE?

- Aby odpowiedzieć na to pytanie musimy sprawdzić co dzieje na poszczególnych stadiach rozwojowych:
 - Jajo – 2% do nimfy, 5% nimf do stadium imago
 - Reprodukacja tylko w stadium imago – samica składa przeciętnie 1000 jaj, po czym umiera
- Stadia rozwojowe: jajo, nimfa, dorosłe owady
- Model tylko dla samic

Skonstruuj macierz Lesliego i oszacuj liczebności w poszczególnych klasach wiekowych dla 5 kolejnych pokoleń zakładając że zaczynamy od populacji liczącej 100 dorosłych samic



POPULUS

- Link

<http://cbs.umn.edu/populus/download-populus>

- Model: Single-Species-Dynamics > Aged-Structured-Growth

- Oznaczenia:

- t - pokolenie
- x – klasa wiekowa
- S_x – liczba osobników, które przeżyły w klasie wiekowej x
- V_x – współczynnik reprodukcji dla klasy wiekowej x
- $l_x m_x$ – tabela przeżycia, ze średnią liczbą potomstwa na samicę w wieku x (m_x) oraz średnim prawdopodobieństwem przeżycia od urodzenia do wieku x (l_x)
- $f(x)$ – liczba potomstwa przypada na samicę w wieku x , które przeżywa
- λ – współczynnik wzrostu populacji
- $S_x / \sum S_x$ - proporcja osobników w klasie wiekowej x

ŹRÓDŁA

- Foryś U. 2005. Matematyka w biologii, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Sharov A. 2015. Quantitative population ecology – lecture notes.
<http://alexei.nfshost.com/PopEcol/>
- Wrzosek D. 2014. Matematyka dla biologów. Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego.
- Program Populus
<http://cbs.umn.edu/populus/download-populus>

