Biomatematyka
Dynamika rozwoju populacji

MODELE Z CZASEM DYSKRETNYM

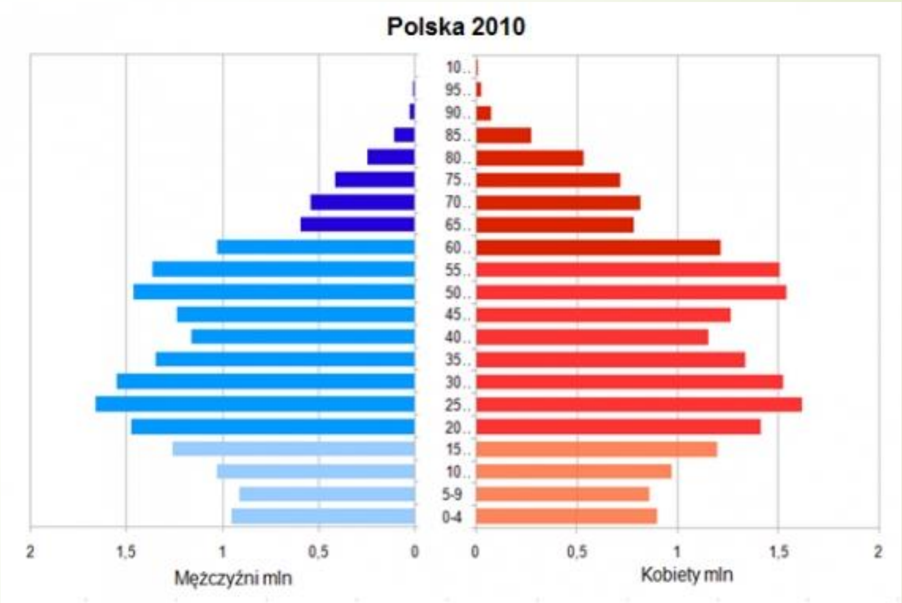
Dr Wioleta Drobik-Czwarno

Katedra Genetyki i Ochrony Zwierząt

JAK MOŻEMY ULEPSZYĆ MODEL WZROSTU GEOMETRYCZNEGO?

- Wiek jest cecha różnicującą osobniki i mającą wpływ na ich wkład do populacji

- Osobniki bardzo młode i bardzo stare:
  - mają znikomy wkład w reprodukcję
  - charakteryzują się zwiększoną śmiertelnością



http://ziemianarozdrozu.pl/artykul/2368/swiat-na-rozdrozu-wykresy-rodzial-4-piramida

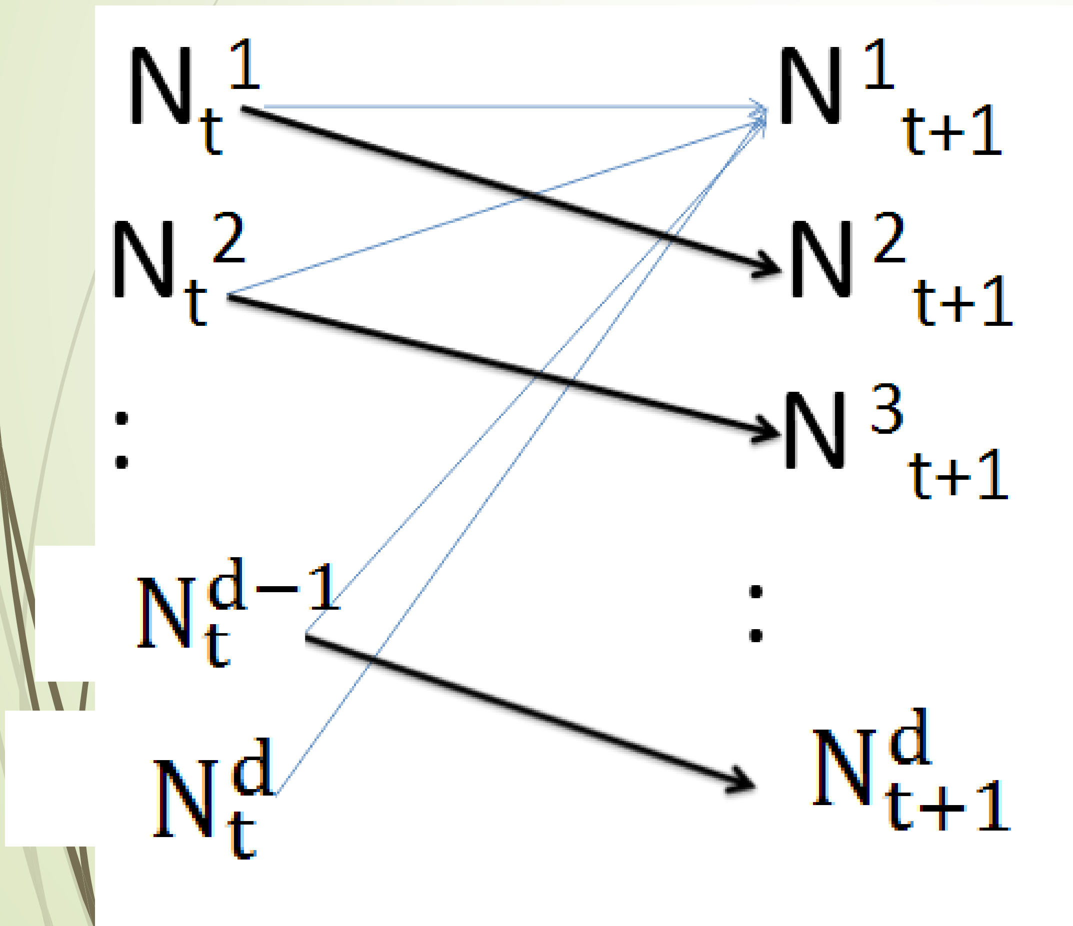
MODELE ZE STRUKTURĄ WIEKU

- Wyróżniamy **d kolejnych klas** wieku: x_0, x_1, x_2, … , x_{d-1} o równej długości

- W jednym kroku czasowym (pokoleniu), o długości równej długości klasy, każdy osobnik może przejść do późniejszej klasy wiekowej lub zginąć
  - krok czasowym oznaczamy t lub k

- Założenia:
  - Wiek osobników zmienia się w sposób skokowy
  - Każda klasa wiekowa jest jednorodna
  - Klasy różnią się miedzy sobą śmiertelnością i rozrodczością
  - Wszystkie osobniki z ostatniej klasy wiekowej giną

Schemat zmian liczebności populacji



POPULACJA PODZIELONA NA KLASY WIEKOWE

- Zakładamy, że poziom reprodukcji i śmiertelności zależy jedynie od wieku osobników
- Pierwsza klasa zawiera tylko osobniki młode – jej rozmiar zależy wyłącznie od poziomu reprodukcji grup rodzicielskich:

$$n(1,t+1) = f(1)\cdot n(1,t) + \ldots + f(d)\cdot n(d,t) = \sum_{x=1}^{d} f(x)\cdot n(x,t)$$

gdzie:

d – liczba grup wiekowych (klas wieku)

t – czas (pokolenie)

f(x) – poziom reprodukcji grupy wiekowej x

n(x,t) – liczebność grupy wiekowej x w pokoleniu t

Populacja podzielona na klasy wiekowe

- Rozmiar kolejnych klas wiekowych w roku następnym zależy od liczebności i przeżywalności w niższej klasie wiekowej:

$$n(x+1,t+1)=P(x)\cdot n(x,t)\Leftrightarrow x>1$$

gdzie:

x – grupa wiekowa

t – czas (pokolenie)

n(x,t) – liczebność grupy wiekowej x w pokoleniu t

P(x) – śmiertelność w grupie wiekowej x

Struktura populacji

- Struktura populacji opisana jest za pomocą wektora, gdzie n(x,t) oznacza liczebność określonej grupy wiekowej x w pokoleniu t

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} n(1,t) \\ n(2,t) \\ \vdots \\ \vdots \\ n(d,t) \end{pmatrix}$$

n(1,t) = osobniki nowonarodzone

n(d,t) = osobniki najstarsze

Struktura populacji w kolejnym pokoleniu

- Strukturę populacji w kolejnym pokoleniu można otrzymać przez pomnożenie powyższego wektora przez macierz **L** zwaną macierzą projekcji lub **macierzą Lesliego**
- Macierz L zawiera informację o poziomie reprodukcji *f*(x) i przeżywalności *P*(x) w poszczególnych klasach:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \cdots & \cdots & f(d) \\ P(1) & 0 & & & 0 \\ 0 & P(2) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & P(d-1) & 0 \end{pmatrix}$$

Model macierzowy Lesliego:

$$\mathbf{n}(t+1) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}(t)$$

Podstawy matematyczne
Wektor a macierz

- Wektor – jednokolumnowa macierz

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Macierz prostokątna A o m wierszach i n kolumnach, oznaczaną $[a_{ij}]_{m \times n}$:

$$A = [a_{ij}]_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Podstawy matematyczne
Wektor a macierz

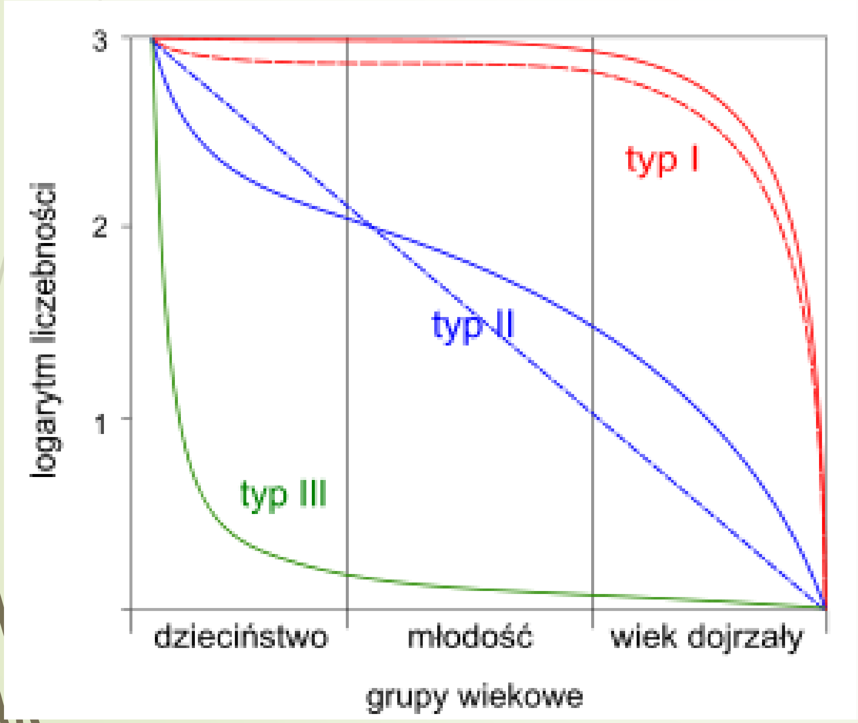
- … kolumnowy

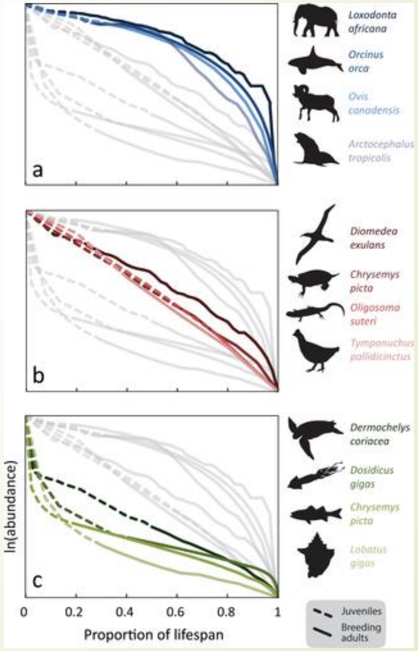
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} :=$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n \end{bmatrix}$$

KRZYWE PRZEŻYWALNOŚCI

- Krzywe przeżywalności – funkcja opisująca liczbę osobników, które dożywają do określonego wieku jeśli znana jest początkowa liczebność grupy wiekowej (kohorty)





https://pl.wikipedia.org/wiki/Krzywa_prze%C5%BCywalno%C5%9Bci

Przykład 1

Struktura wiekowa populacji wraz ze współczynnikami reprodukcji oraz przeżywalności

	jednoroczne	dwuletnie	trzyletnie
Liczebność początkowa	100	100	100
Poziom reprodukcji	1	1	1
Przeżywalność	0,8	0,5	0

Przykład 1

Macierz Lesliego (projekcji)

- Rozwiązanie:

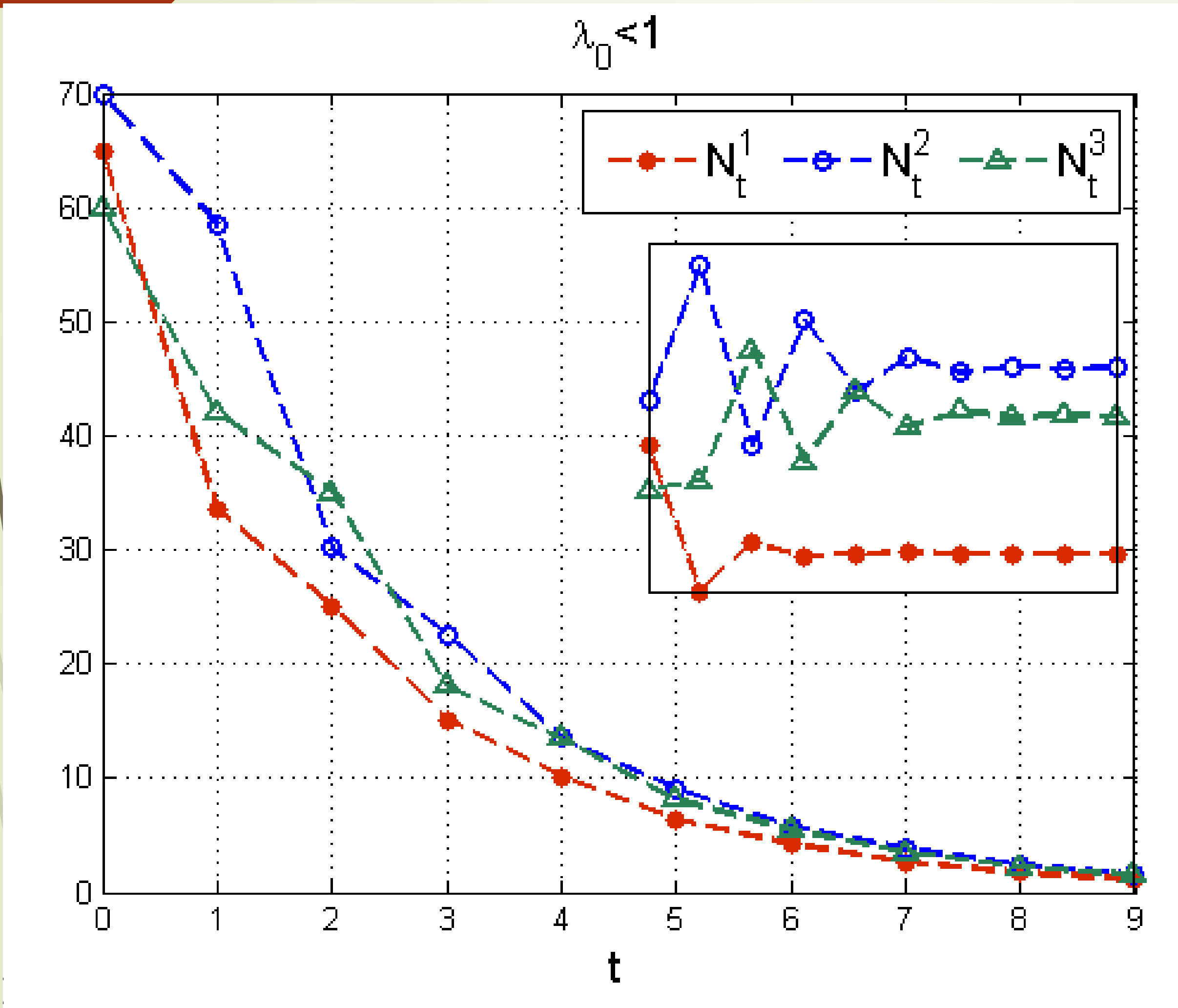
Liczebności poszczególnych klas wiekowych

$$\begin{bmatrix}100\\100\\100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0{,}8 & 0 & 0\\0 & 0{,}5 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}100\\100\\100\end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix}100\\100\\100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0{,}8 & 0 & 0\\0 & 0{,}5 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}100+100+100\\80+0+0\\0+50+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}300\\80\\50\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}300\\80\\50\end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix}300\\80\\50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0{,}8 & 0 & 0\\0 & 0{,}5 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}300+80+50\\240+0+0\\0+40+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}430\\240\\40\end{bmatrix}$$

Populacja wymierająca



Współczynnik wzrostu populacji:

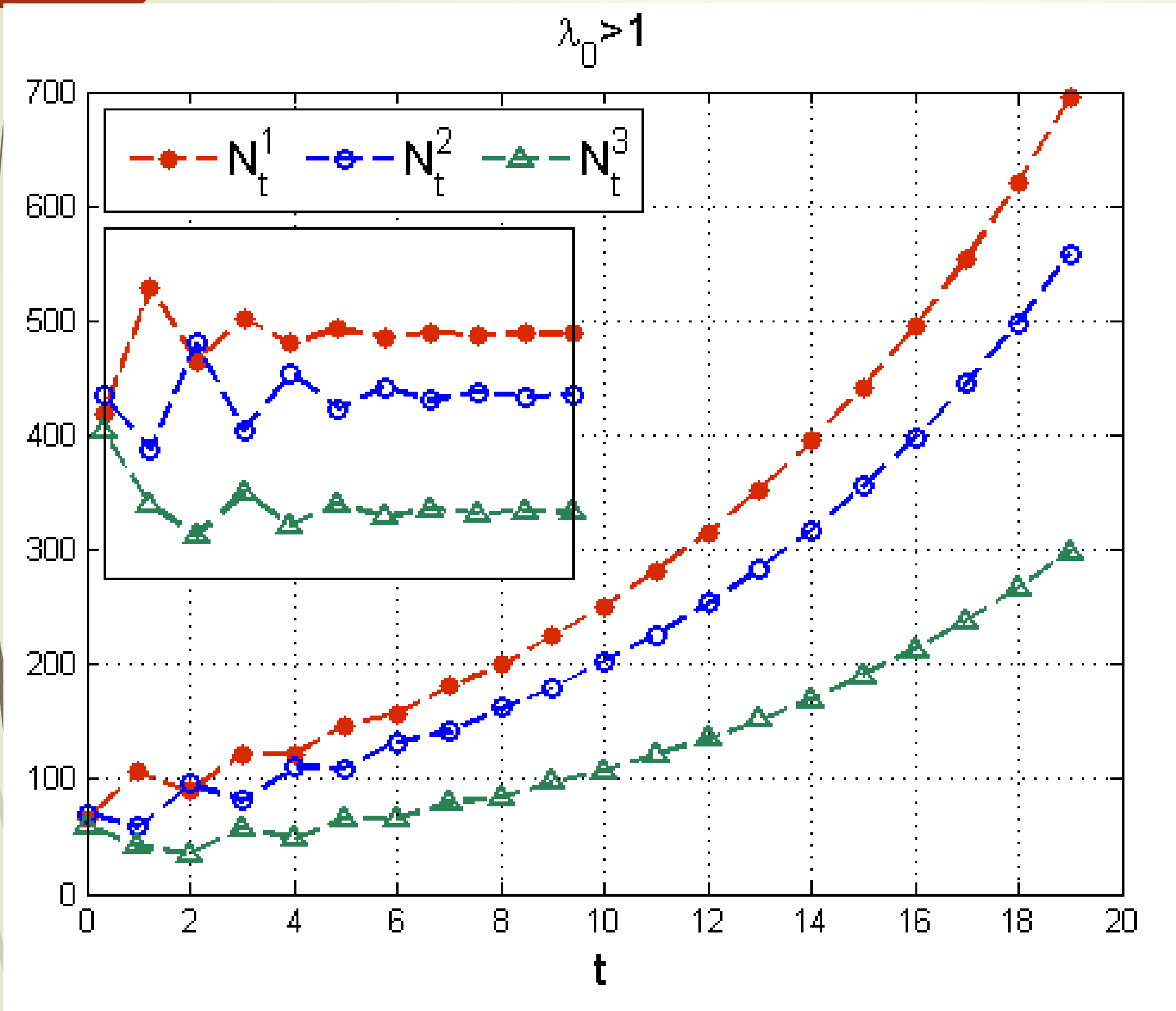
$$r = \lambda = \frac{N_{t+1}}{N}$$

Populacja podzielona na trzy grupy wiekowe w zależności od dominującej wartości własnej λ_0

Wstawki pokazują ewolucję procentowego udziału poszczególnych grup wiekowych w całości populacji

Źródło: http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=mbm&part=Ch4

Populacja rozwojowa

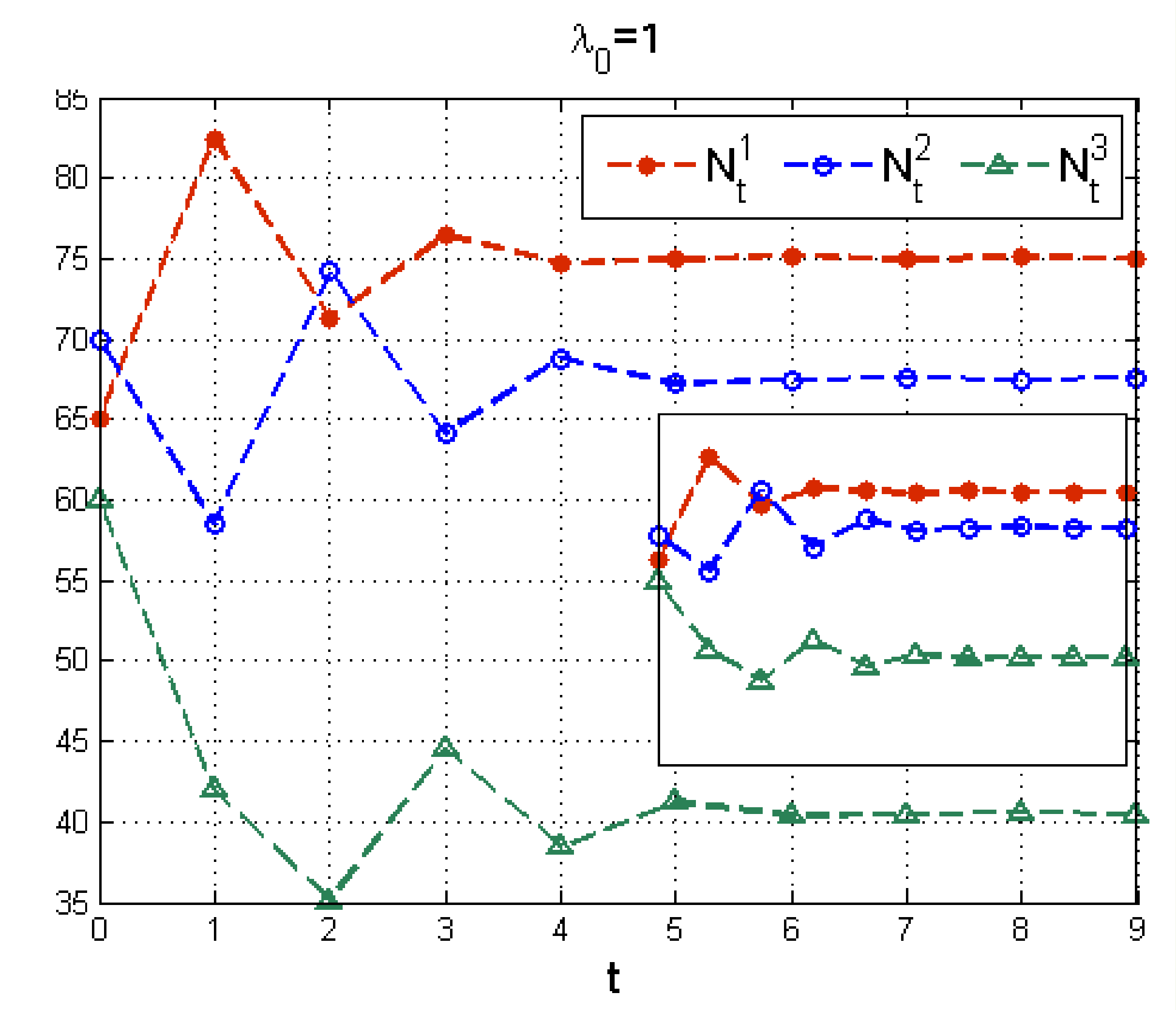


Populacja podzielona na trzy grupy wiekowe w zależności od dominującej wartości własnej λ_0

Wstawki pokazują ewolucję procentowego udziału poszczególnych grup wiekowych w całości populacji

Źródło: http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=mbm&part=Ch4

Populacja stacjonarna



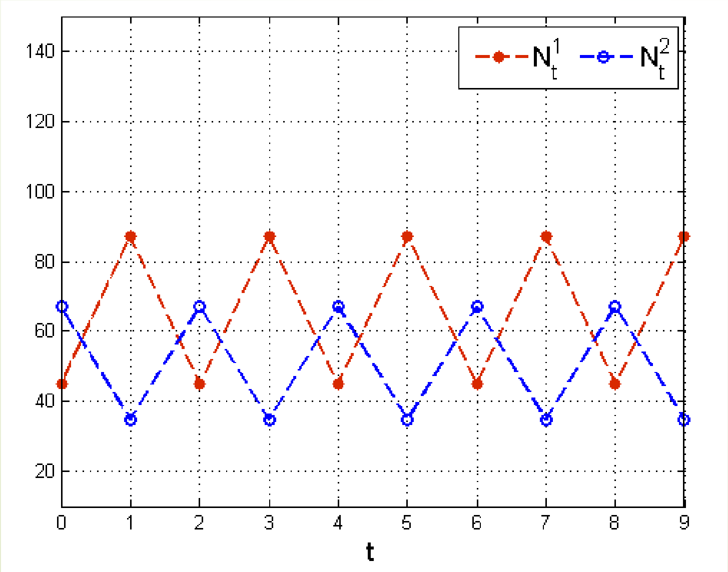
Populacja podzielona na trzy grupy wiekowe w zależności od dominującej wartości własnej λ_0

Wstawki pokazują ewolucję procentowego udziału poszczególnych grup wiekowych w całości populacji

Źródło: http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=mbm&part=Ch4

Właściwości modelu

- Dla większości warunków początkowych populacja asymptotycznie osiąga rozkład wieku V_0 przy współczynniku rozrodczości λ_0
- Możliwe są także cykliczne zmiany struktury wieku
  - Z sytuacją taką mamy do czynienia gdy mamy tylko dwie grupy wiekowe, a rozmnażają się tylko osobniki najstarsze



Właściwości modelu

- Wymaga dużej ilości danych
  - Specyficzne dla wieku wskaźniki przeżywalności i rozrodu – trudno jest zebrać takie dane!
- Nie uwzględnia podziału na płeć – model zazwyczaj tylko dla samic
- Nie uwzględnia nachodzenia na siebie poszczególnych stadiów rozwojowych
  - nie wszystkie osobniki opuszczają daną klasę wiekową
  - wyraźnie oddzielone od siebie na poziomie populacji stadia rozwojowe wyróżniamy np u szarańczy.

Literatura

- **Vandermeer J 2010. How Populations Grow: The Exponential and Logistic Equations. Nature Education Knowledge 3(10): 15.**

  link: https://www.nature.com/scitable/knowledge/library/how-populations-grow-the-exponential-and-logistic-13240157
- Wrzosek D 2010. Matematyka dla biologów.
- Foryś U. 2011. Modelowanie w biologii i medycynie.
- Katyal i wsp. 2019 A Compedium of Fibonacci Ratio
- The Biology Project: http://www.biology.arizona.edu/

Dziękuję za uwagę