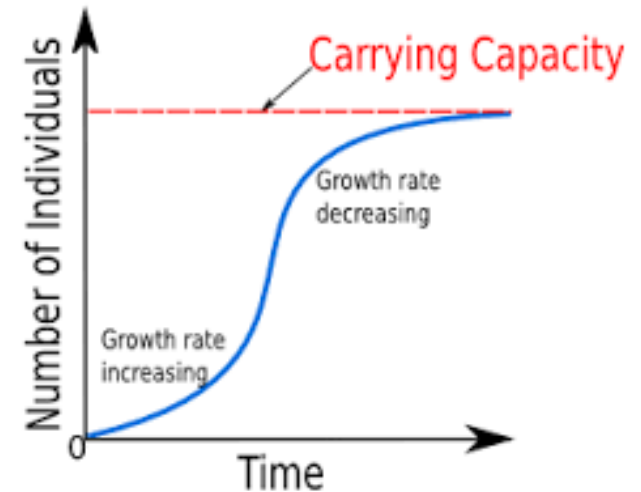


$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$



MODELE WZROSTU POPULACJI Z CZASEM CIĄGŁYM

Dr Wioleta Drobik-Czwarno

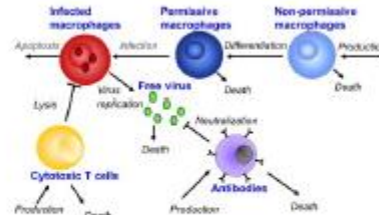
PODSTAWY MATEMATYCZNE

- Procesy biologiczne, chemiczne i fizyczne z większą ilością zmiennych można zapisać równaniami różniczkowymi.
 - Potrzebne narzędzia: granica funkcji, pochodna, całka

Rzeczywistość

Model

Układ równań różniczkowych



$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

Zyskane informacje na temat rzeczywistości

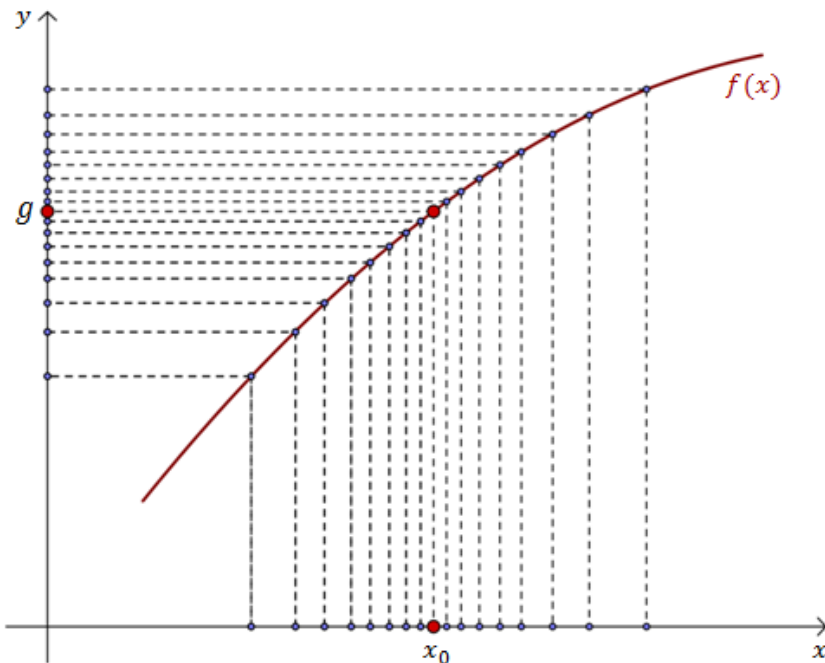
Zyskane informacje na temat modelu

Analiza i rozwiązanie układu równań

GRANICA FUNKCJI

DEFINICJA HEINEGO

- Funkcja $f(x)$ ma granicę g w punkcie x_0 , jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g



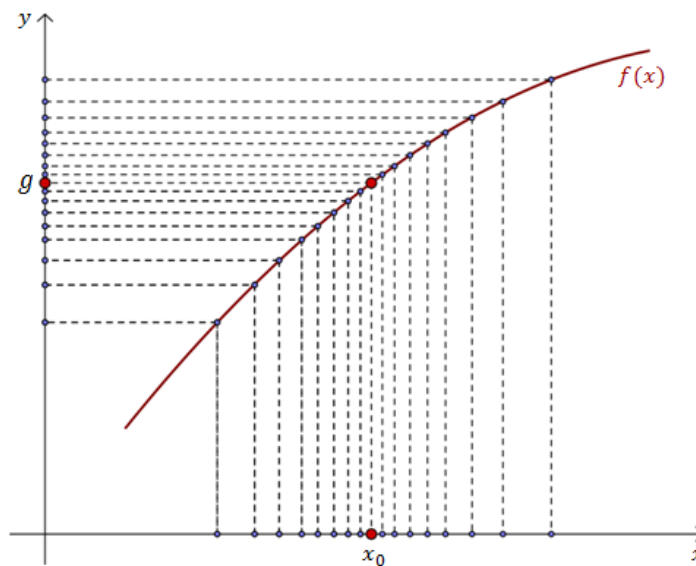
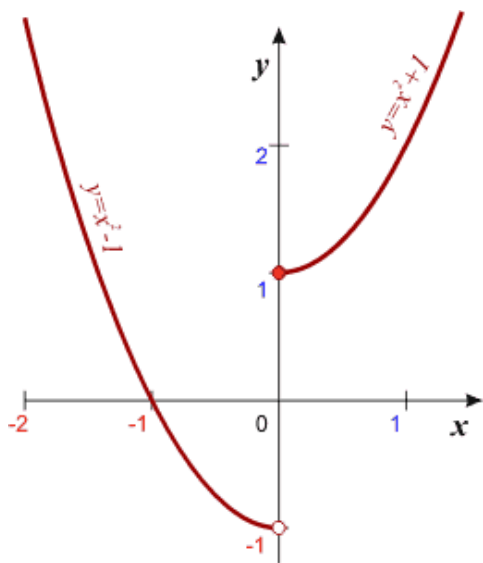
„Granica funkcji, gdy x dąży do x_0 jest g ”

„Funkcja f dąży do g , gdy x dąży do x_0 ”

Możemy mówić o granicy prawostronnej i lewostronnej

GRANICA I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

- **Funkcja jest ciągła w punkcie x** swojej dziedziny, jeśli, zbliżając się w dziedzinie funkcji do punktu x , wartości tej funkcji zbliżają się do wartości w punkcie x
- Funkcję ciągłą w każdym punkcie swojej dziedziny nazywamy **funkcją ciągłą** ➡ Małym zmianom argumentu funkcji odpowiadają niewielkie zmiany wartości funkcji



POCHODNA FUNKCJI

- Obliczanie pochodnych: **różniczkowanie**
- Funkcje, która posiada pochodną: **funkcja różniczkowalna**
- Oznaczenia pochodnej:

Gdy funkcję zadamy wzorem $y = f(x)$

$$\frac{df(x)}{dx}$$



$$\frac{dy}{dx}$$

Oznaczenie wprowadzone przez Leibniza

$$f'(x)$$



$$y'$$

Oznaczenie wprowadzone przez Lagrange'a

$$Df(x)$$



$$Dy$$

Oznaczenie wprowadzone przez Cauchy'ego

$$\dot{f}(x)$$

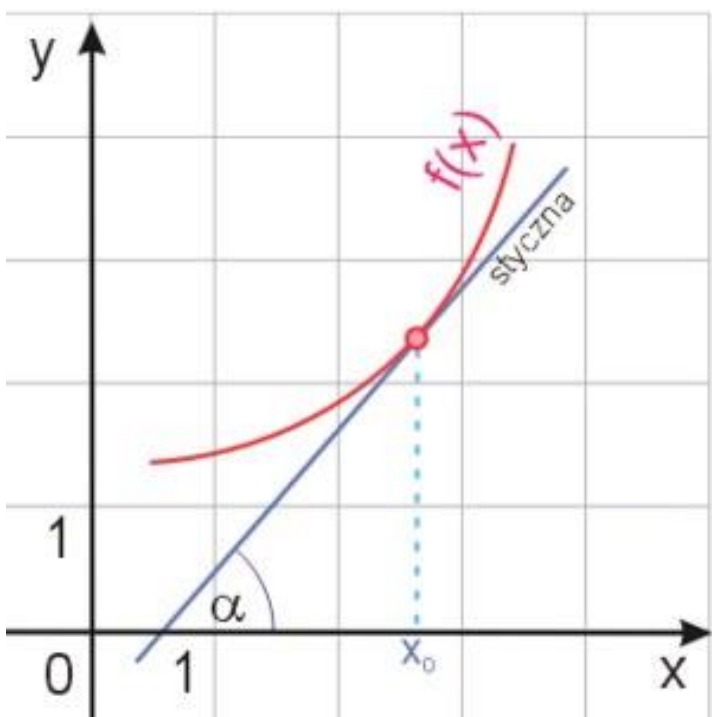


$$\dot{y}$$

Oznaczenie wprowadzone przez Newtona

POCHODNA FUNKCJI

- **Definicja geometryczna:** Pochodna $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej (*czyli współczynnikowi kierunkowemu stycznej*) do krzywej o równaniu $y=f(x)$ w punkcie o odciętej x_0 do osi OX.



$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha$$

Definicja fizyczna: Pochodna wyraża szybkość przyrostu funkcji w chwili x_0 .
Jeżeli $s = s(t)$, jest funkcją drogi w zależności od czasu, to pochodna $s'(t_0)$ jest prędkością w chwili t_0 .

POCHODNA FUNKCJI

- Definicja matematyczna: **granica ilorazu różnicy wartości i różnicy argumentów funkcji, gdy różnica argumentów dąży do zera**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x_0
to stosunek wartości funkcji do przyrostu argumentów funkcji

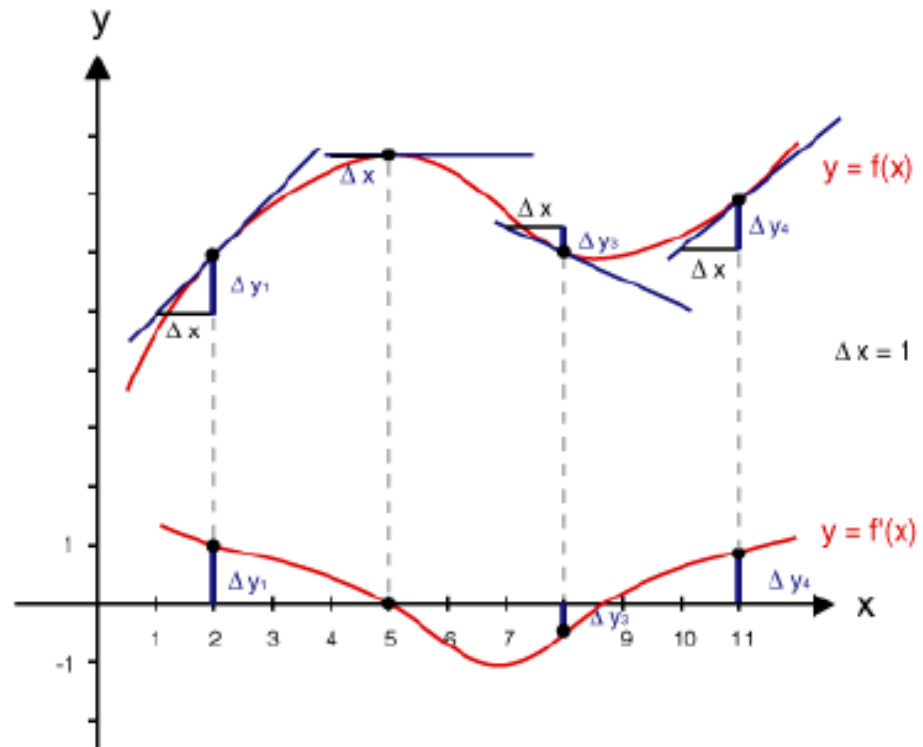
Funkcja musi być ciągła w punkcie x_0 aby mieć pochodną



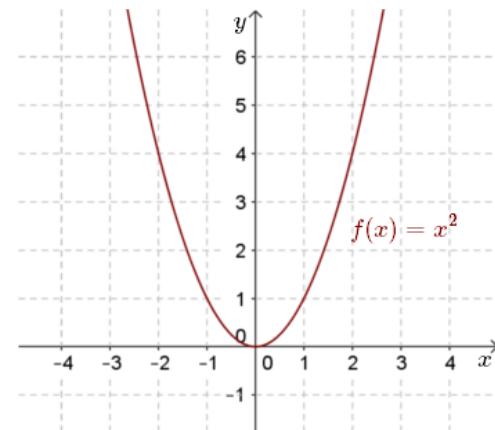
MAKSIMA I MINIMA FUNKCJI

- Pochodne pozwalają na znalezienie maksimów i minimów funkcji
- Szukamy takiego x_0 , że:

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = 0$$



WYZNACZANIE POCHODNYCH Z DEFINICJI



- Pochodna funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0=2$
- Obliczanie wartości pochodnej w punkcie x_0 korzystając z definicji:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4+h) = 4 \end{aligned}$$

- Wzór ogólny pochodnej dla tej funkcji:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

- Wzór ogólny: $f'(x)=2x$, więc $f'(0)=2 * 0 = 0$

POCHODNE FUNKCJI ELEMENTARNYCH

L.p.	Funkcja	Pochodna funkcji
1.	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
2.	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
3.	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
4.	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{1}{x^2}$
5.	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6.	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
7.	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
8.	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
9.	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Jeżeli chcemy
wyznaczać
pochodne funkcji
potrzebne będą
wzory dla funkcji
elementarnych (w
tabeli) oraz prawa
działań na
pochodnych



DZIAŁANIA NA POCHODNYCH

○ Jeżeli f, g mają pochodne w punkcie x_0 to:

A.
$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

B.
$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0), \text{ gdzie } c \in R$$

C.
$$(f \times g)' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

D.
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$



WYZNACZANIE POCHODNEJ FUNKCJI

- Pochodna funkcji potęgowej – wzór:

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

- Przykład: oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^5$:

$$f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = (x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$$



WYZNACZANIE POCHODNEJ FUNKCJI

- Pochodna funkcji wykładniczej – wzór:

$$f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = e^x \ln e = e^x \quad \text{ponieważ } \ln e = 1$$

- Przykład: oblicz pochodną funkcji $f(x)=4^x$:

$$f(x) = 4^x \rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = 4^x \ln 4$$



WYZNACZANIE POCHODNEJ FUNKCJI

- Oblicz pochodną funkcji $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2$

$$f'(x) = (2x^3 + 5x^2 - 2)' = (2x^3)' + (5x^2)' - (2)'$$

$$f'(x) = 6x^2 + 10x$$

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

CAŁKA

- Całkowanie jest działaniem odwrotnym do różniczkowania
- Oznaczamy symbolem $\int$ od łacińskiego słowa *Summa* (suma)
- Całką funkcji $f(x)$ nazywamy taką funkcję $F(x)$, że:

$$F'(x) = f(x)$$

Funkcję $F(x)$ spełniającą powyższy warunek nazywa się **funkcją pierwotną**

- Operację całkowania zapisujemy w następujący sposób:

$$\int f(x)dx = F(x)$$



CAŁKA

$$\int f(x) dx = \int 2x + 7 dx = x^2 + 7x$$

sprawdzamy rozwiązanie:

$$(x^2 + 7x)' = 2x + 7$$

Czy znaleziona przez nas funkcja jest jedynym dobrym rozwiązaniem?

- Do całkowania prostych funkcji wykorzystujemy wzory całkowe

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

CALKA

- Całka nieoznaczona

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f

c jest dowolną stałą

$$F'(x)=f(x)$$

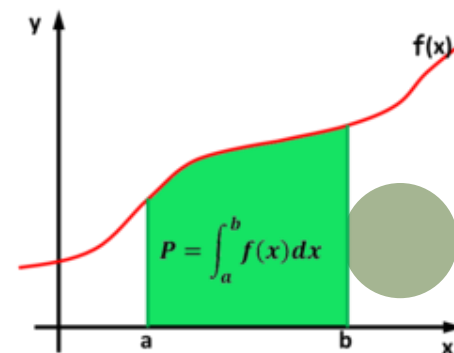
- Całka oznaczona

w ujęciu geometrycznym jest to liczenie pola pod wykresem funkcji nad osią X

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f

$f(x)$ jest funkcją ciągłą, nieujemną na odcinku $a \leq x \leq b$



RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Przedstawia sposób w jaki stan danego procesu w danej chwili wpływa na **tempo jego zmian** (wyrażone za pomocą pochodnej)

- Przez $x(t)$ oznaczamy stan danego procesu w chwili t .
Równanie różniczkowe postaci:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

- Z warunkiem początkowym $x(t_0)=x_0$ określa przebieg tego procesu, jeżeli znamy jego stan w chwili t_0 .
- Funkcja f charakteryzuje dany proces



WYKŁADNICZY WZROST POPULACJI – MODEL Z CZASEM CIĄGŁYM

- W danym środowisku występuje jeden gatunek, a jego zasoby są nieograniczone. Populacja jest jednorodna, a osobniki nie umierają.
 - Przez $N(t)$ oznaczmy zagęszczenie populacji w chwili t
 - Czas reprezentowany jest przez **zbiór liczb rzeczywistych dodatnich**
 - Przyrost populacji (*per capita*) w chwili t określający zmianę zagęszczenia populacji przypadającą na jednego osobnika **jest stały i równy r**
- **Równanie Malthusa** (liniowe równanie różniczkowe):

$$\dot{N}(t) = \frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$$

$N(t)$ – zagęszczenie
populacji w chwili t
 r – współczynnik
wzrostu populacji

warunek początkowy w chwili t_0 :

$$N(t_0) = N_0$$



WYKŁADNICZY WZROST POPULACJI – MODEL Z CZASEM CIĄGŁYM

$$\dot{N}(t) = \frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$$

○ Rozwiązanie:

przyjmujemy $N(t) = y$

$$\int \frac{dy}{y} = \int r dt$$

rozdzielamy zmienne - y oraz t muszą znaleźć się po przeciwnych stronach równania – umożliwia to całkowanie osobno obydwu stron równania

$$\ln|y| = rt + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{rt+C}$$

$$y = N(t) = N_0 e^{rt} \quad \text{rozwiązanie równania}$$

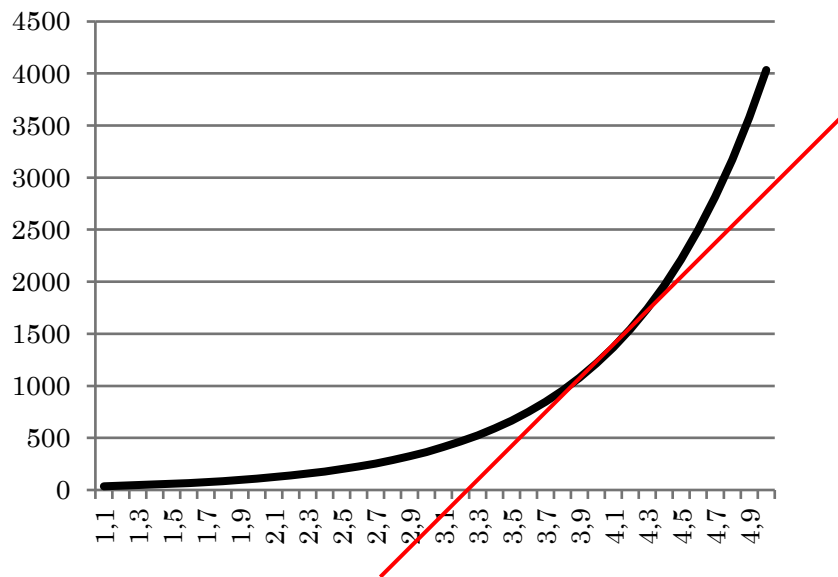


WYKŁADNICZY WZROST POPULACJI

- **Współczynnik wzrostu populacji (r)** zwany inaczej współczynnikiem **wewnętrznego tempa wzrostu populacji**

$$r = \frac{\ln N_2 - \ln N_1}{\Delta t} = \frac{\ln(N_2/N_1)}{\Delta t}$$

r jest współczynnikiem kierunkowym stycznej



Wartość r wskazuje na kierunek zmian liczebności populacji – przy wzroście wykładniczym zawsze jest dodatnie i stałe.

MODEL Z CZASEM CIĄGŁYM

WZROST WYKŁADNICZY

- Model wzrostu
wykładniczego
(wzór ogólny)

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

t – upływ czasu

N_0 – stała, początkowa liczebność populacji

r – tempo wzrostu

e – liczba Eulera ($\sim 2,7182818\dots$)

Jakie jest tempo wzrostu kolonii bakterii jeżeli co 3 godziny podwaja ona swoją liczebność?

$$N(t) = 1e^{rt} = e^{rt} \quad \text{Początkowe zagęszczenie jest równe 1}$$

$$N(3) = 2 = e^{3r} \quad \text{W 3 godzinie populacja podwoiła swoją liczebność}$$

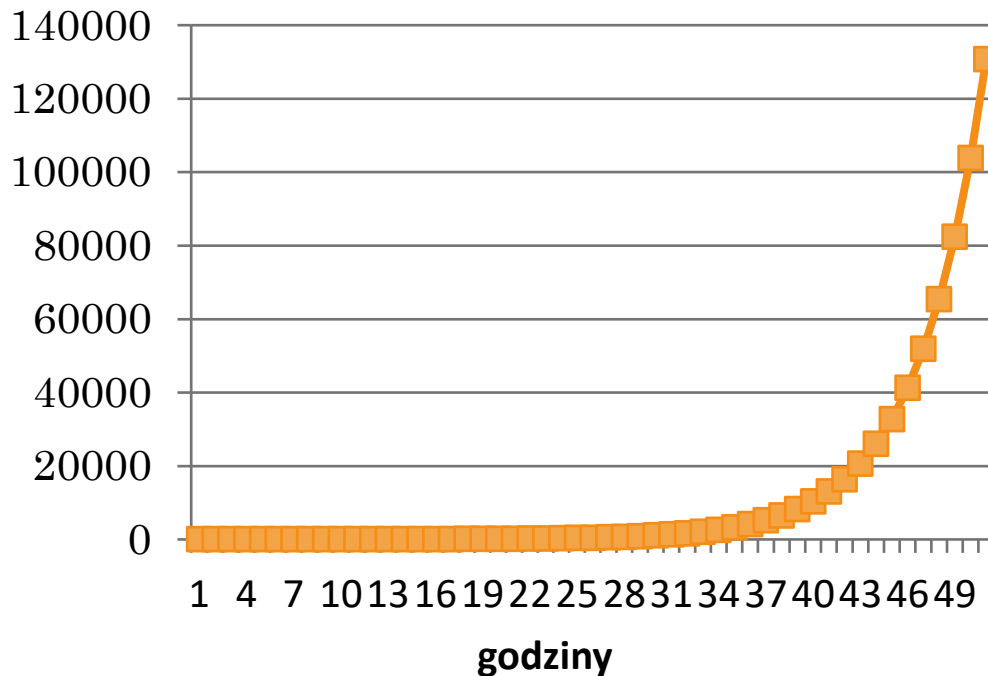
Rozwiązujemy dla r :

$$\ln 2 = \ln e^{3r} \quad \text{ponieważ} \quad \ln(e^x) = x \quad \text{to} \quad \ln 2 = 3r$$

$$\text{więc} \quad r = \frac{\ln 2}{3}$$

WYKŁADNICZY WZROST POPULACJI

- Jak wygląda wzór na wykładniczy wzrost populacji bakterii przy założeniu podziałów co 3 godziny?



WYKŁADNICZY WZROST POPULACJI

1. Jakiego będzie zagęszczenie kolonii po 51 godzinach?

$$N(51) = e^{0,231 \cdot 51} \approx 130744$$

2. Od jakiego zagęszczenia kolonii bakterii należy zacząć aby otrzymać 81920 po 42 godzinach?

$$N(42) = 81920 = N_0 e^{0,231 \cdot 42} \rightarrow N_0 \approx 5$$

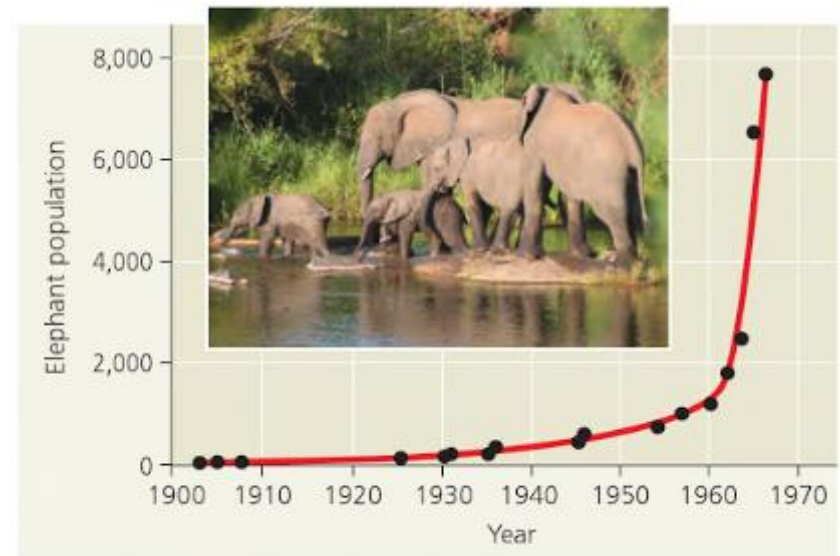
3. Ilu godzin (h) potrzeba aby z 6 komórek otrzymać 12288, zachowując stałe tempo podziałów?

$$N(t) = 12288 = 6 e^{0,231 \cdot t} \rightarrow t \approx 33$$



MODEL WZROSTU WYKŁADNICZEGO A RZECZYWISTOŚĆ

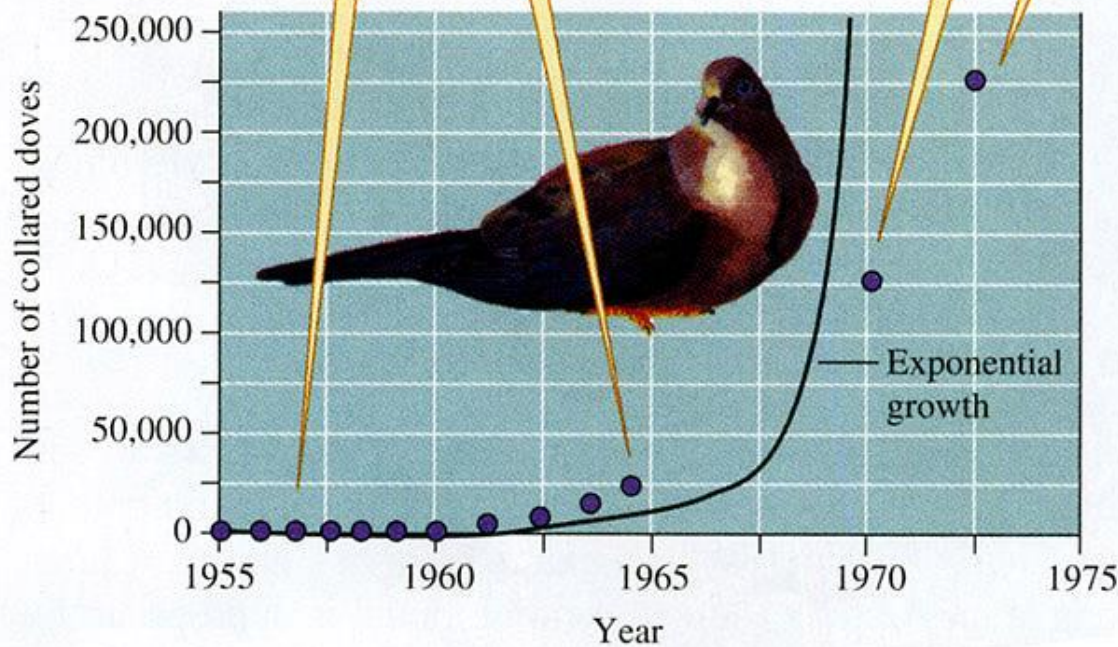
- Wzrost wykładniczy jest **charakterystyczny dla populacji introdukowanych na nowe terytorium lub takich, które przeszły przez duże zawężenie liczebności** (kłusownictwo, katastrofa ekologiczna, epidemia)
- Przykład: Słonie Afrykańskie w parku Krugera w południowej Afryce, populacja rosła wykładniczo przez pierwsze 60 lat
- Konieczna była kontrola populacji ze względu na duże zniszczenia roślinności
- W 2010 liczba słoni osiągnęła 11,5 tys.



MODEL WZROSTU WYKŁADNICZEGO A RZECZYWISTOŚĆ

Wykładniczy wzrost
populacji po
kolonizacji

Po niecałych
dwudziestu latach
wzrost populacji był
wolniejszy niż
wykładniczy



Sierpówka
(*Streptopelia decaocto*)
Gatunek ptaka z rodziny
gołębiowatych. Jest to
gatunek inwazyjny, a jego
ekspansja dokonała się w
bardzo krótkim czasie

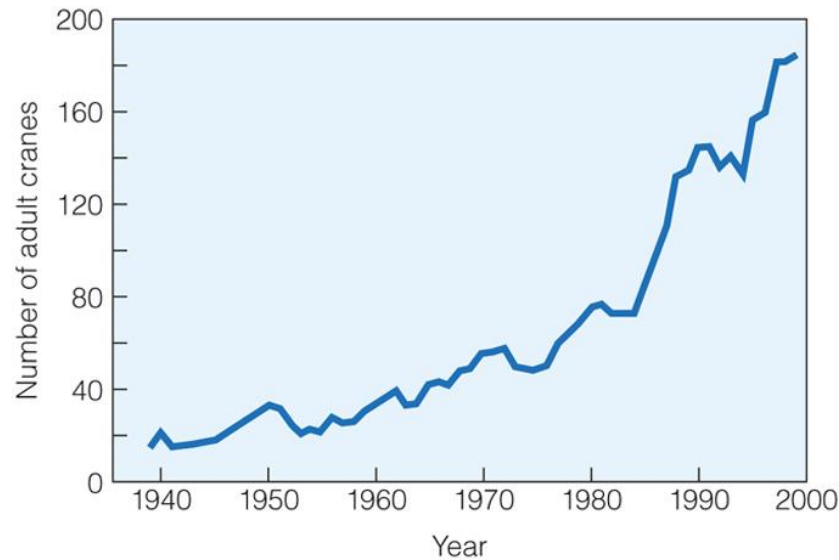
(Krebs, 2001)

W 1954 roku kilka par dotarło na wyspy brytyjskie

MODEL WZROSTU WYKŁADNICZEGO A RZECZYWISTOŚĆ



(a)



(b)

Żuraw krzykliwy

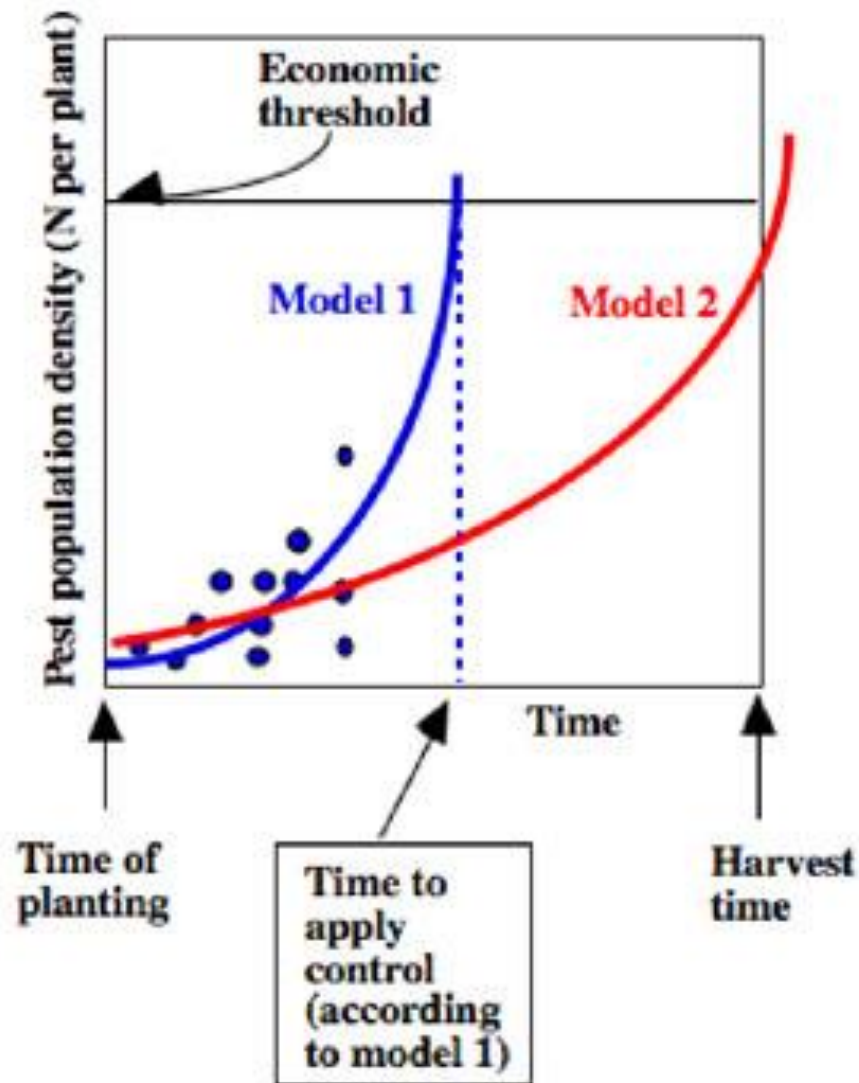
Gatunek dużego ptaka wodnego z rodziny żurawi. W 1941 roku znalazł się na skraju wymarcia, populacja została odtworzona z 21 osobników

Obecnie ~ 300 osobników



(Krebs, 2001)

MODEL WZROSTU WYKŁADNICZEGO A RZECZYWISTOŚĆ



Kiedy kultura bakterii osiągnie określony rozmiar?

Kiedy powinniśmy wprowadzić środki ochrony roślin?

Jakie tempo wzrostu przyjąć mając ograniczone dane?

NIELINIOWE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

- Dlaczego liniowe modele wzrostu populacji nie wystarczą?
 - Konkurencja międzygatunkowa
 - Ograniczenie przestrzeni
 - Zdarzenia losowe: katastrofy, epidemie

W celu uwzględnienia dwóch pierwszych czynników, wprowadzamy funkcję, która opisuje wpływ wzrostu zagęszczenia na przyrost populacji per capita



LOGISTYCZNY WZROST POPULACJI

- Jest to najprostszy model uwzględniający wpływ zagęszczenia na tempo zmian populacji
- **Pojemność środowiska (K)** z ang. *carrying capacity*
 - Jest równy zagęszczeniu populacji, przy którym tempo wzrostu populacji spada do zera
 - Maksymalne zagęszczenie populacji wyznaczone przez zasoby danego siedliska
 - Równanie logistyczne z czasem ciągłym (równanie Verhulsta)



WZROST LOGISTYCZNY ZAŁOŻENIA

- Niezmienne warunki środowiskowe
- Liniowa zależność pomiędzy tempem wzrostu a zagęszczeniem populacji
- Każdy osobnik ma taki sam wpływ na zasoby środowiska
- **Wzrost zależny od zagęszczenia** – współczynnik **r** **zmniejsza się** w miarę jak populacja zbliża się do K
- Brak interakcji z innymi gatunkami (poza zdobywaniem pożywienia)
- Środowisko ma cały czas tą samą pojemność, **zasoby są odnawialne do pewnego poziomu $\rightarrow K$**



LOGISTYCZNY WZROST POPULACJI

- Tempo wzrostu wartości funkcji w czasie wyraża pochodna:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

**Gdy N jest bliskie 1
wzrost jest niemal taki
jak wykładniczy**

N – liczebność populacji

r – tempo wzrostu populacji

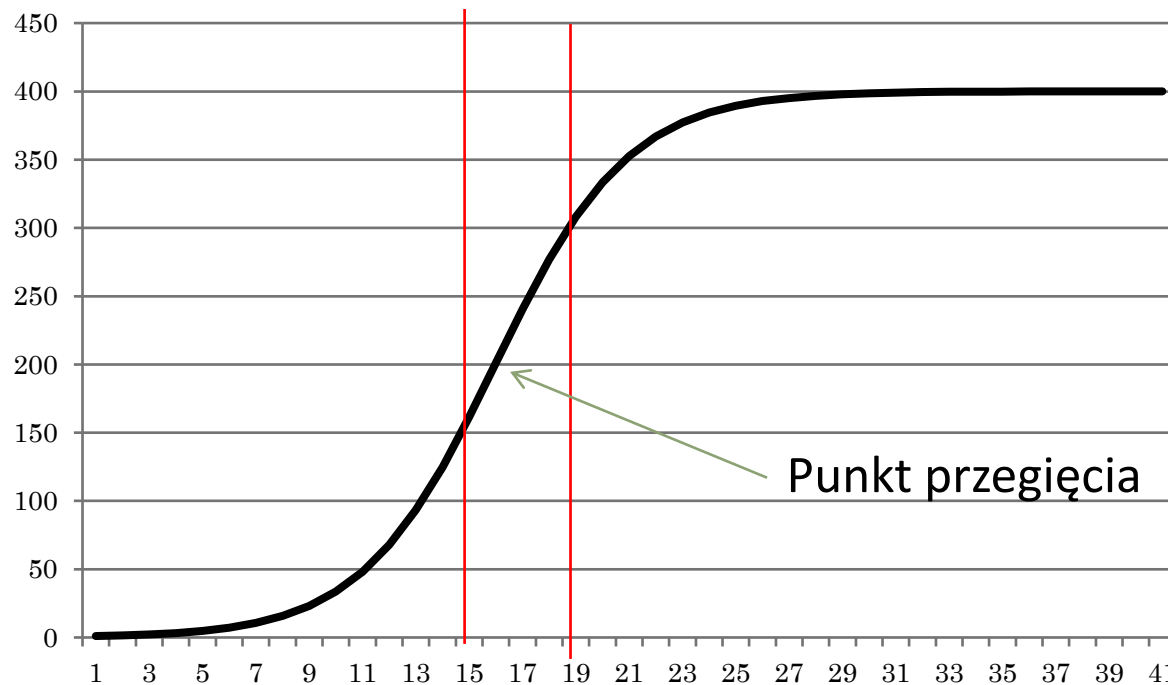
K – pojemność środowiska

Gdy $N \rightarrow K$ wyrażenie w nawiasie zbliża się do zera, co skutkuje redukcją tempa wzrostu populacji



KRZYWA LOGISTYCZNA

- Efekt stopniowego wyczerpywania się zasobów siedliska eksploatowanego przez populację wyraża się pośrednio przez spadek tempa wzrostu dla $N > \frac{K}{2}$ aż do wartości $N=K$



Wzrost wykładniczy

Wzrost liniowy

Wzrost asymptotyczny

STANY STACJONARNE FUNKCJI

- Stanem stacjonarnym nazywamy stałą wartość będącą rozwiązaniem równania różniczkowego dla długich czasów, $t \rightarrow +\infty$. Stany stacjonarne są zwane inaczej:

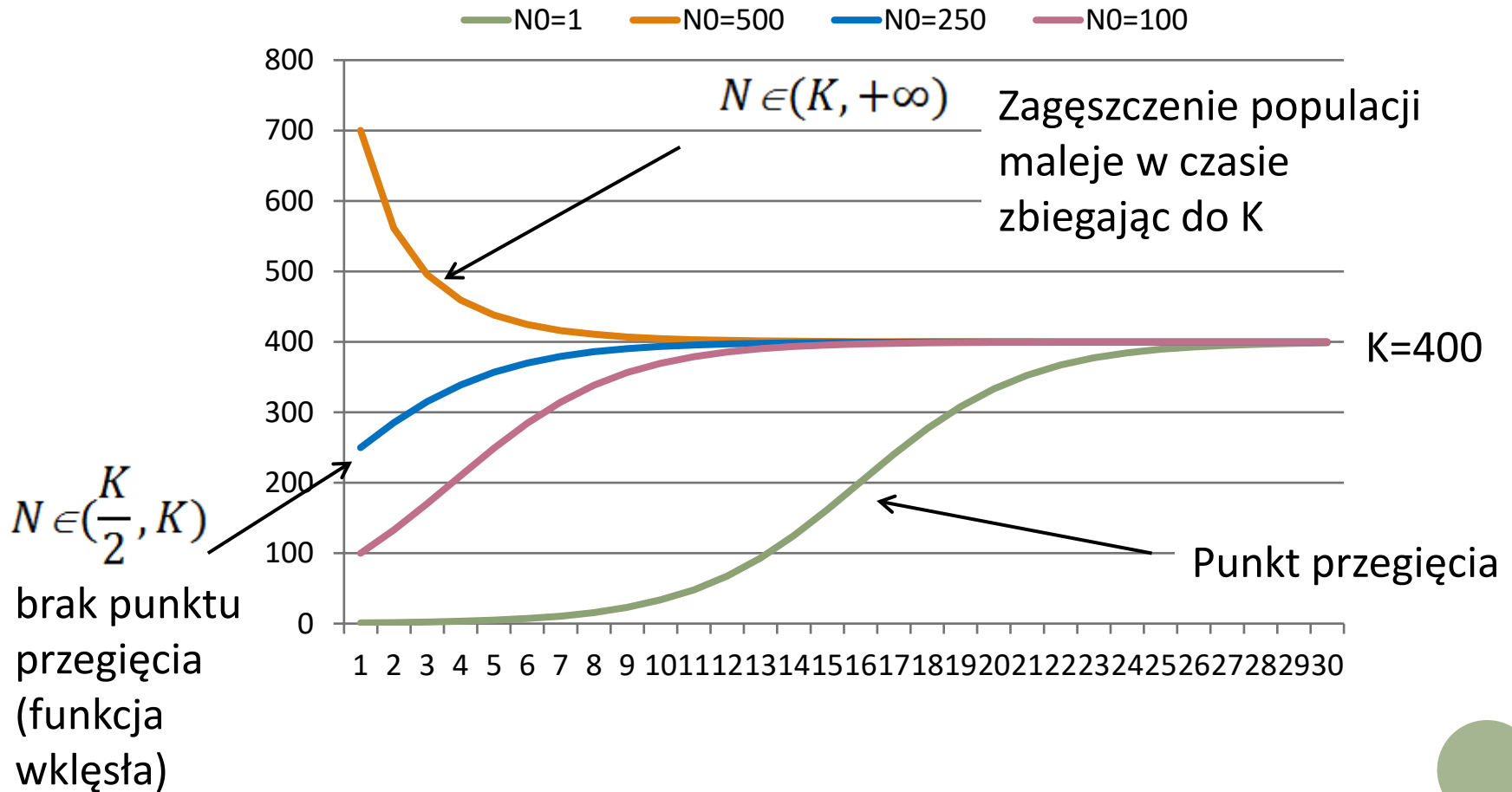
- punkt stały
- punkt równowagi

Np. x_1 jest stanem stacjonarnym gdy rozwiązanie równania różniczkowego zbiega asymptotycznie do x_1 , gdy, $t \rightarrow +\infty$
dla jednego równania różniczkowego może istnieć kilka stanów stacjonarnych

- Dla funkcji logistycznej stan stacjonarny jest stabilny asymptotycznie
 - Tzn. „przyciąga” w czasie wszystkie stany ze swojego bliskiego otoczenia



ROZWIĄZANIA DLA RÓŻNYCH WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH



LOGISTYCZNY WZROST POPULACJI

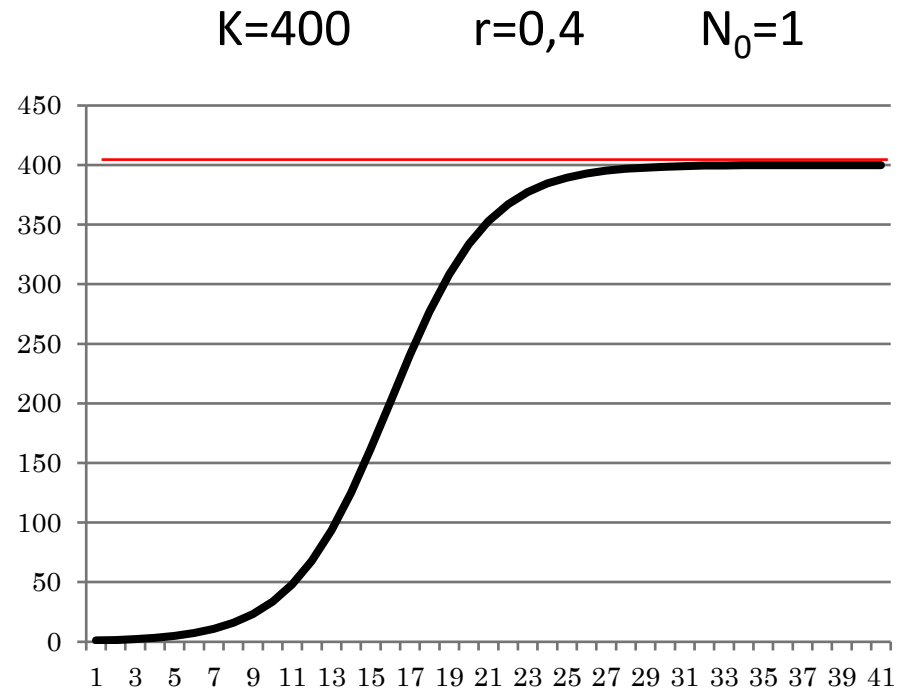
ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA RÓŻNICZKOWEGO

- Rozwiązanie równania umożliwia predykcję stanu populacji:

$$N_t = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) e^{-r(T-t_0)}}$$

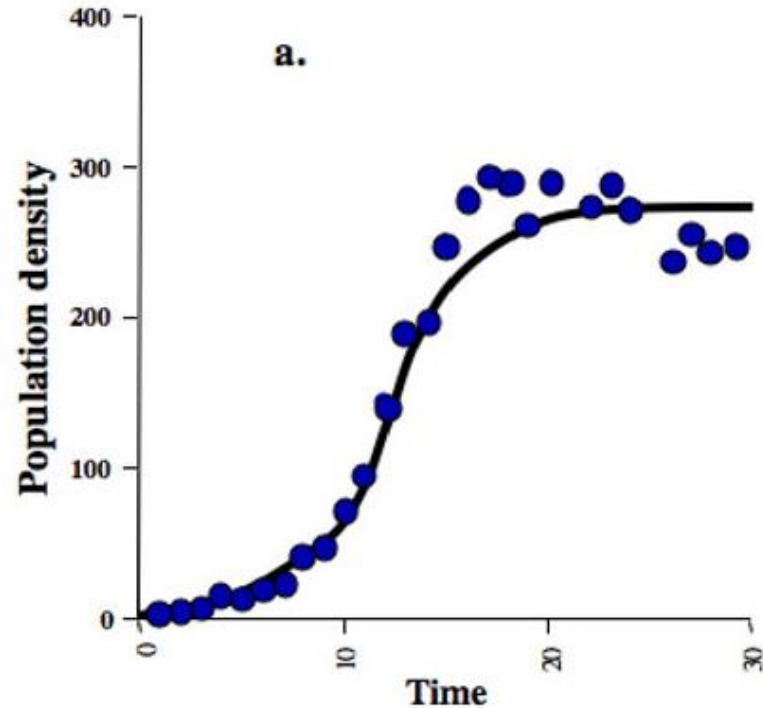
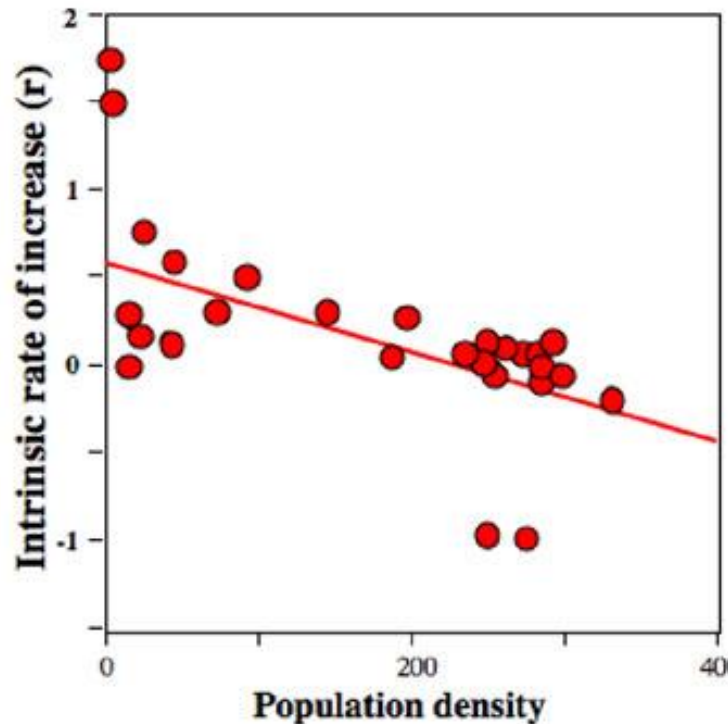
gdzie:

- K – pojemność środowiska
- r – tempo wzrostu populacji
- N_0 – początkowe zagęszczenie populacji
- T – czas obecny
- t_0 – czas początkowy



GDZIE OBSERWUJEMY WZROST LOGISTYCZNY

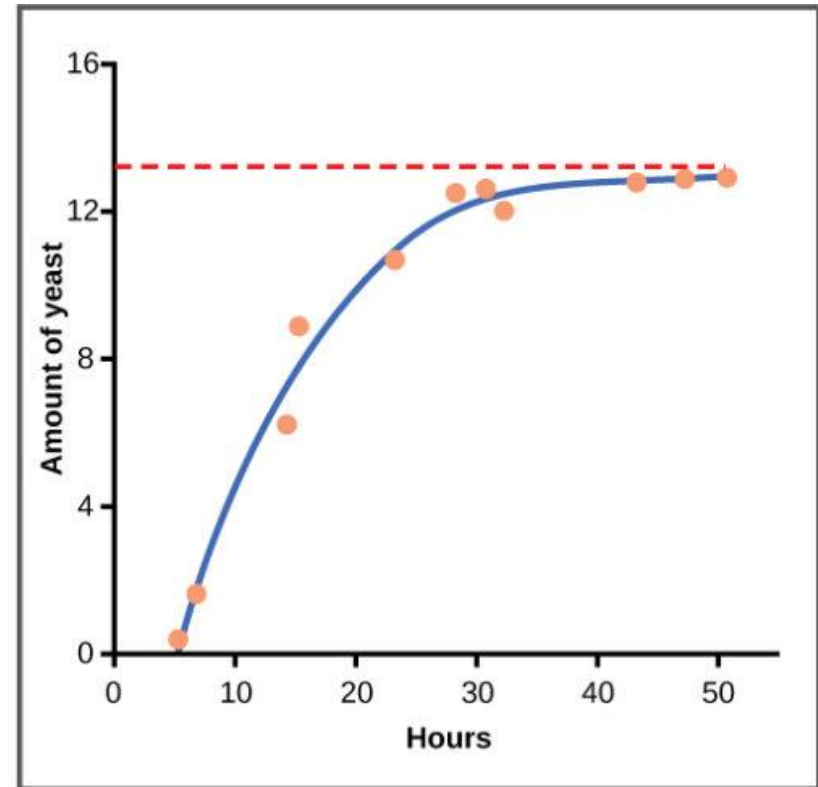
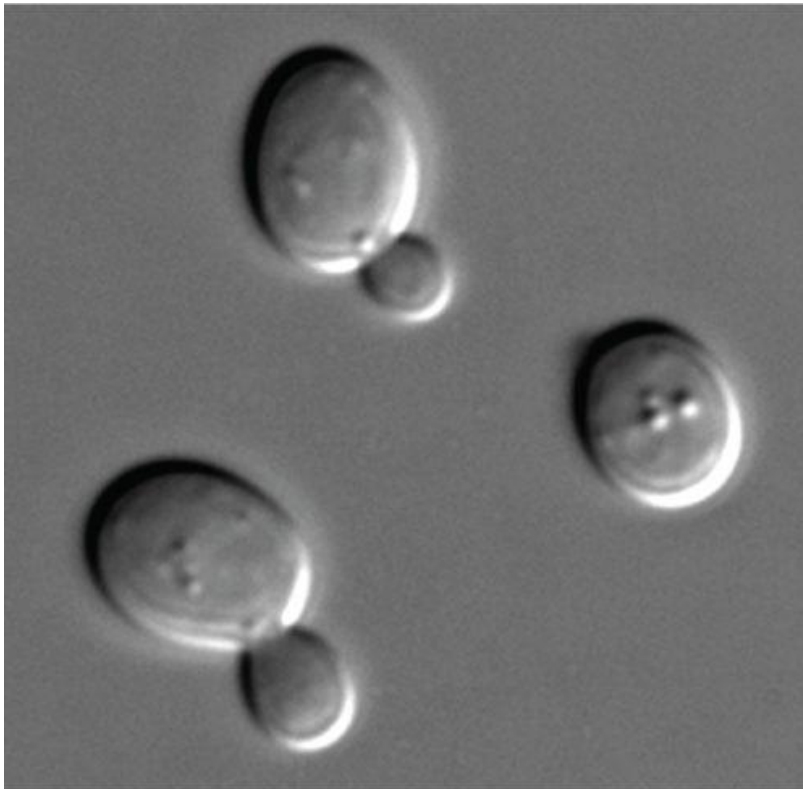
Wzrost *kultury bakterii* w laboratorium



Zależność pomiędzy tempem wzrostu (r) oraz zagęszczeniem populacji (N) jest liniowa

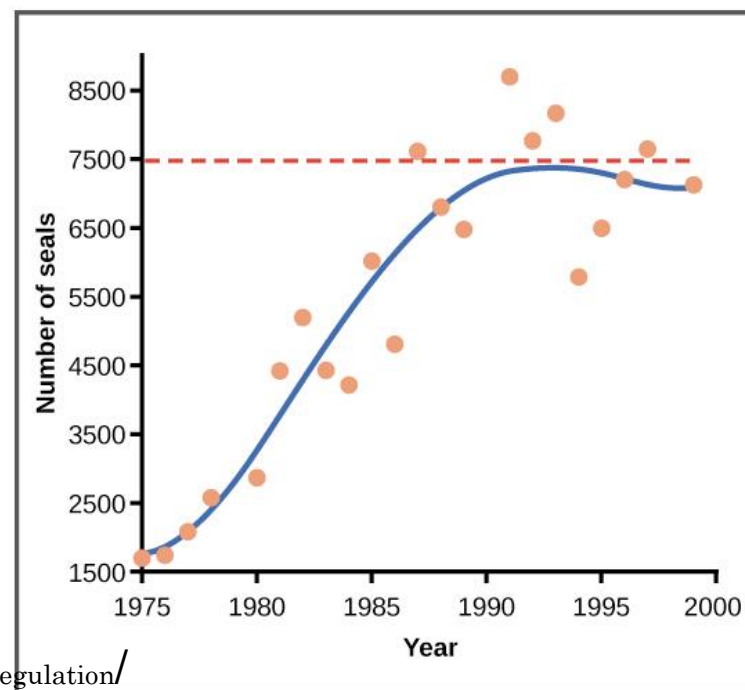
Vandermeer, J., 2010

DROŹDZE



FOKA POSPOLITA

- Na skutek intensywnych polowań na początku XX wieku (foku postrzegane były jako szkodniki) populacja fok na terenie stanu Waszyngton znacząco spadła
- Po zaprzestaniu polowań obserwowano szybkie tempo wzrostu populacji
- Populacja ustabilizowała swoją liczebność na poziomie ~7500 sztuk, więc:
 $K = 7500$



Źródło:

<https://openoregon.pressbooks.pub/envirobiology/chapter/4-2-population-growth-and-regulation/>

ROZWINIĘCIE MODELU LOGISTYCZNEGO

EFEKT ALLEEGO

- Efekt alleego zakłada, że populacja zmniejsza swoją liczebność, jeśli spadnie ona poniżej pewnego progu
- Efekt jest powiązany z drapieżnictwem:
 - w populacji występuje gatunek drapieżnika żywiący się osobnikami populacji P
 - drapieżników jest zawsze dużo
 - gdy liczebność populacji P jest niewielka, drapieżniki eliminują dostępne osobniki i populacja wymiera
- Modele uwzględniające efekt alleego mogą mieć różną postać w zależności od postaci funkcji drapieżnictwa. Najprostszy to modyfikacja równania logistycznego.



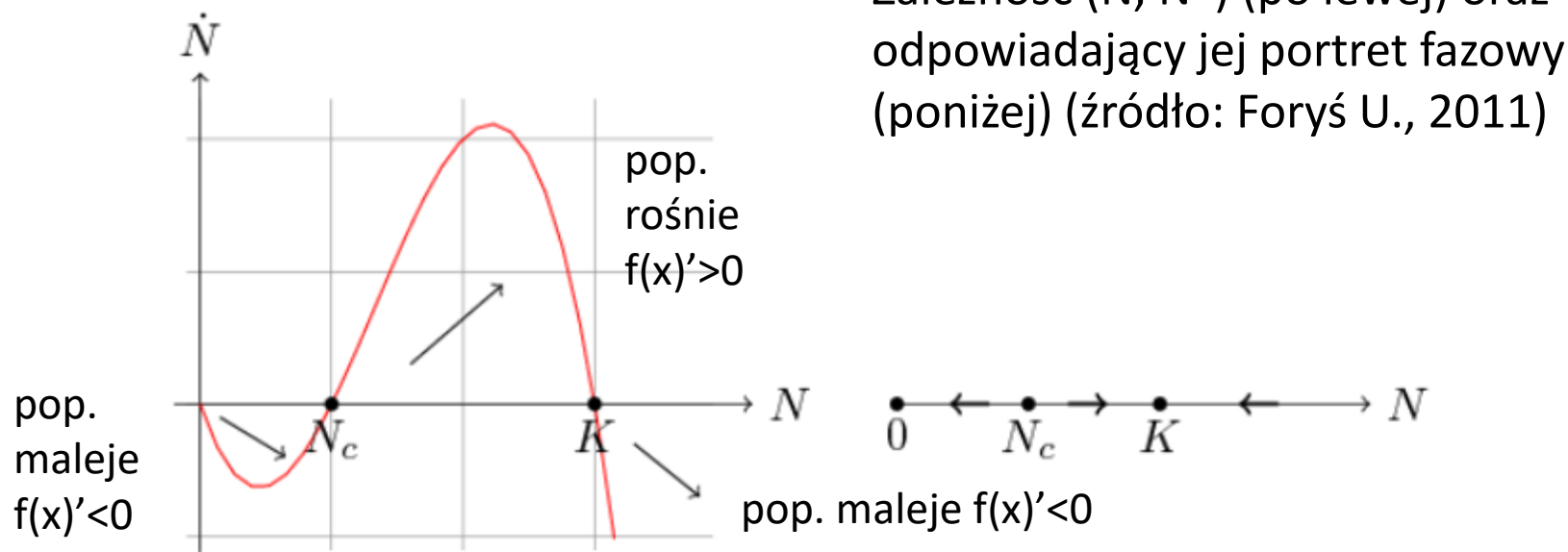
ROZWINIĘCIE MODELU LOGISTYCZNEGO

EFEKT ALLEEGO

- Zakładając $N(t) = N$ oraz wprowadzając nowy współczynnik (N_c) do równania logistycznego otrzymujemy::

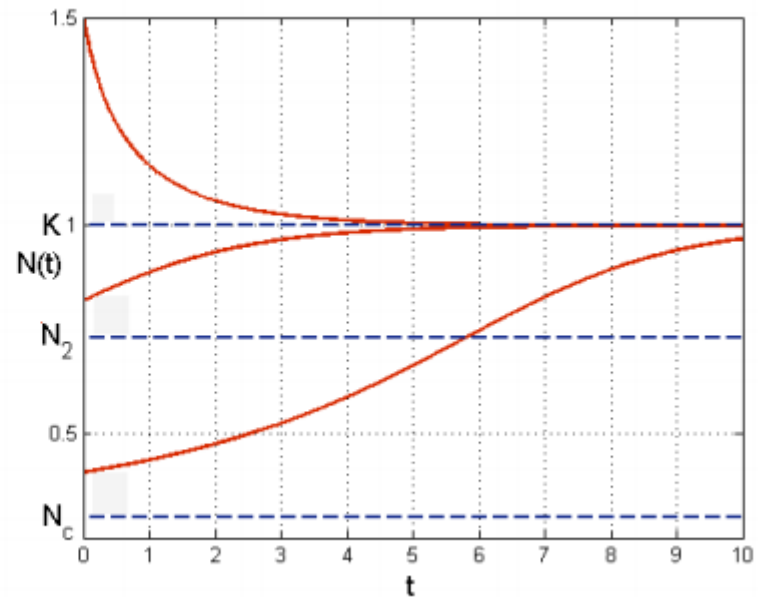
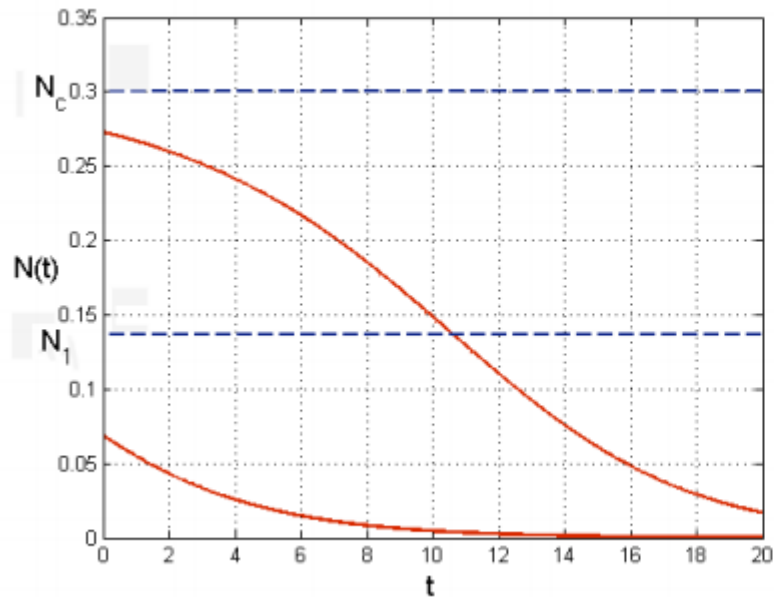
$$\frac{dN}{dt} = rN(N - N_c)\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

N_c – pułapka drapieżnictwa



ROZWINIĘCIE MODELU LOGISTYCZNEGO

EFEKT ALLEEGO

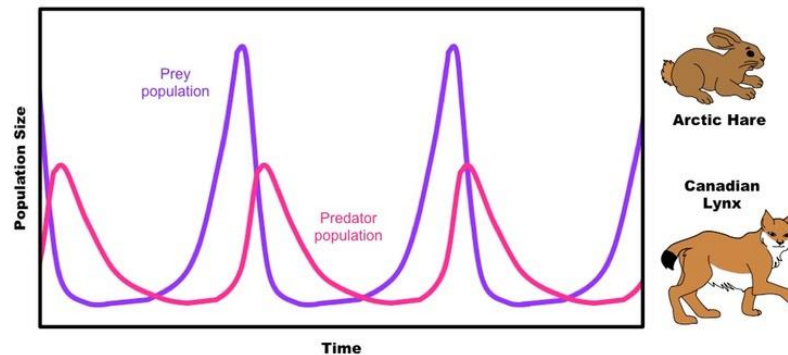
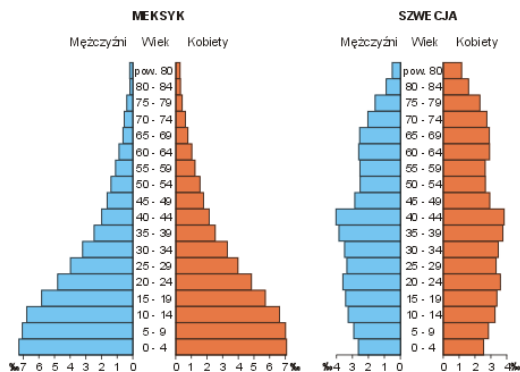


Rozwiązania równania dla różnych wartości początkowych N_0
(źródło: Foryś U., 2011)

MODEL LOGISTYCZNY

- W odróżnieniu od modelu wykładniczego uwzględnia **ograniczoną pojemność środowiska** – ale nie dopuszcza jej zmian w czasie (np. pożywienie a pora roku, wycinka lasów)
- Model nie uwzględnia:
 - struktury wieku populacji
 - migracji przestrzennych (np. w poszukiwaniu pożywienia)
 - czynników losowych i ich wpływu na parametry modelu
 - oddziaływań międzypopulacyjnych, np. drapieżca-ofiara

Piramidy wieku ludności
- społeczeństwo "młode" (Meksyk) i "stare" (Szwecja)



MODEL LOGISTYCZNY Z CZASEM DYSKRETNYM

- Równanie różnicowe:

$$N_{k+1} = N_k \left(1 + R \left(1 - \frac{N_k}{K} \right) \right)$$

N_k – zagęszczenie populacji po k krokach czasowych

R – wzrost populacji *per capita*, przy ominięciu konkurencji wewnątrzgatunkowej

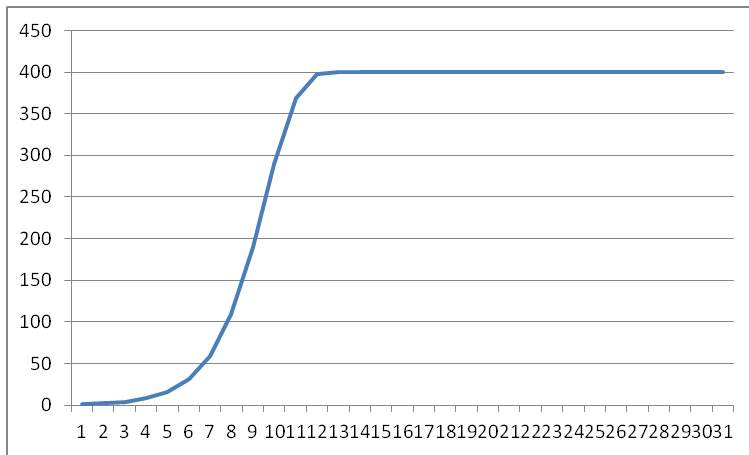
Interpretacja i krzywa wzrostu podobna do równania różniczkowego, ale inne właściwości!



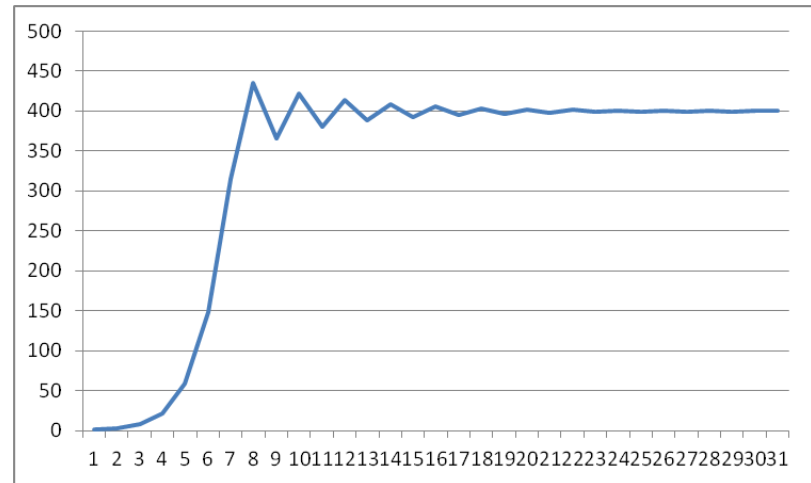
MODEL LOGISTYCZNY Z CZASEM DYSKRETNYM

$$N_0 = 1; K = 400$$

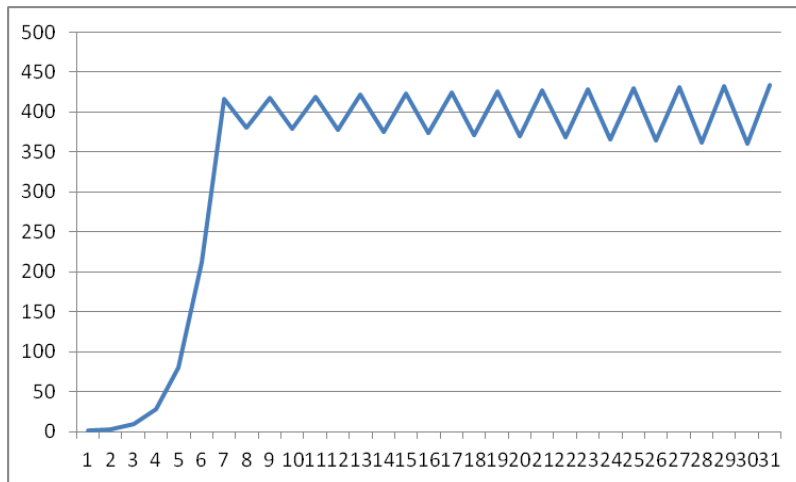
$R = 1$



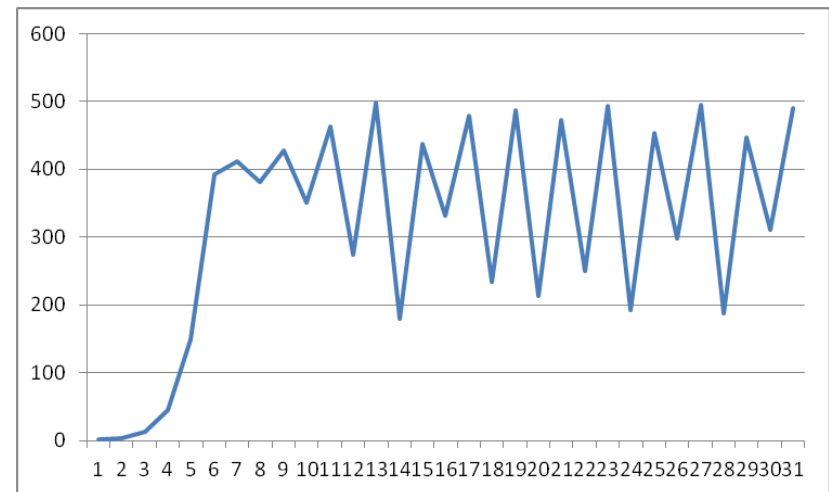
$R = 1,8$



$R = 2,1$



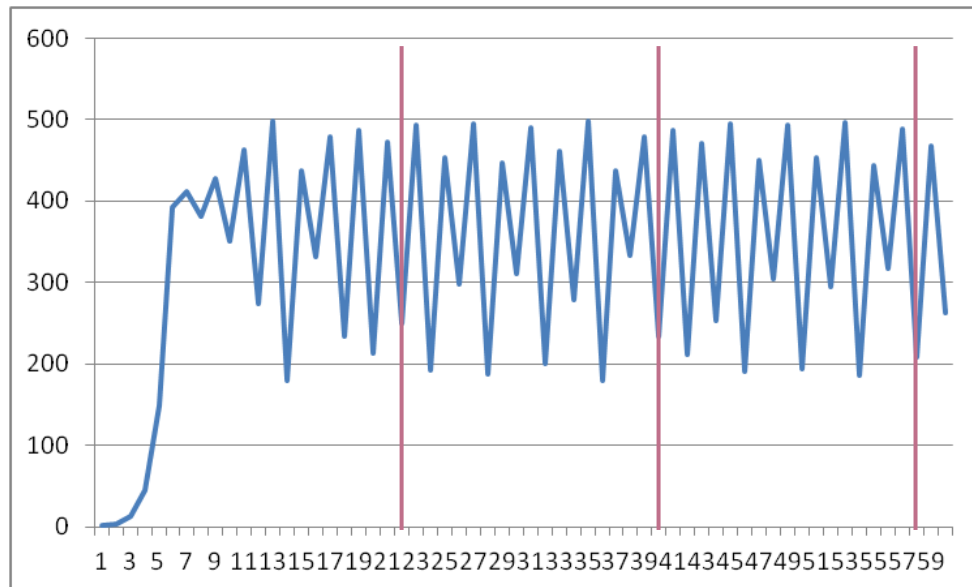
$R = 2,6$



MODEL LOGISTYCZNY Z CZASEM DYSKRETNYM

○ Bifurkacja

- Stan stacjonarny przestaje być stabilny i w jego otoczeniu pojawia się stabilna trajektoria o okresie n
- Startując z jednego punktu stacjonarnego trafiamy do drugiego, aby w kolejnym kroku wrócić do pierwszego
- Wraz ze wzrostem parametru R zachodzą kolejne bifurkacje i pojawiają się trajektorie o coraz dłuższych okresach



MODEL LOGISTYCZNY Z CZASEM DYSKRETNYM

- Przebieg trajektorii staje się coraz bardziej skomplikowany i nieprzewidywalny wraz ze wzrostem parametru R
- Trajektoria może być okresowa lub błądzi po całym zakresie osi Y bez widocznej reguły

Jeżeli rozwiązania układu równań różnicowych lub różniczkowych mają skomplikowany i nieprzewidywalny przebieg na długich przedziałach czasu to efekt taki nazywamy **chaosem deterministycznym**



CHAOS DETERMINISTYCZNY

- Znany od lat 70-tych XX wieku, ma początki w opisie matematycznym zjawisk atmosferycznych
- Dotyczy zwykle układów równań różniczkowych i różnicowych, opisujących **układy dynamiczne**
- Najczęściej występuje w układzie co najmniej trzech równań różnicowych / różniczkowych

Nawet bardzo prosty, pod względem struktury matematycznej model, jakim jest dyskretne równanie logistyczne, może mieć zaskakująco bogate i skomplikowane właściwości matematyczne



CHAOS DETERMINISTYCZNY

- Trajektorie startujące z bliskich punktów szybko oddalają się od siebie
 - Efekt dużej wrażliwości na zmianę warunków początkowych
 - Niewielka zmiana warunków początkowych daje znaczną zmianę przebiegu rozwiązania
 - Jest to tzw. **efekt motyla**

Nazwa pochodzi od pioniera badań zjawisk chaotycznych Edwarda N. Lorenza



CHAOS A LOSOWOŚĆ

○ Losowość

- Brak powtarzalności i przewidywalności
- Procesy losowe nie są deterministyczne – różne wartości wyjściowe dla tych samych wartości wejściowych

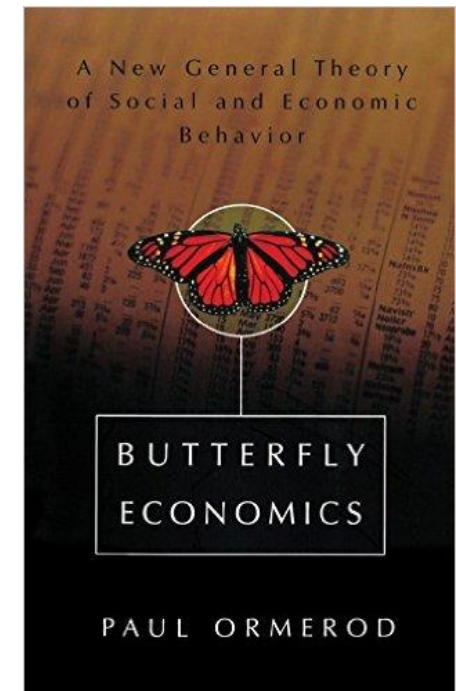
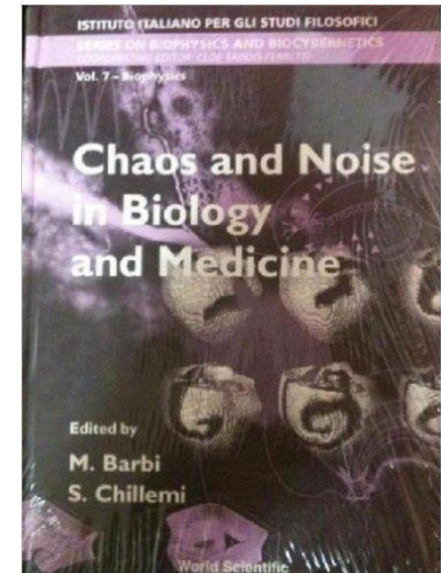
○ Chaos

- Nieregularny w czasie
- Deterministyczny – te same wartości na wejściu dają zawsze ten sam wynik
- Trudne lub niemożliwe długoterminowe prognozy



CHAOS - PRZYKŁADY

- Astronomia – ruch planet i gwiazd
- Ekonomia – szeregi czasowe, analiza rynków finansowych
- Inżynieria – dynamika statków, ruch uliczny
- **Praca organów np serce, mózg**
- **Biologia populacyjna**
- **Reakcje chemiczne**
- Prognozowanie pogody



LITERATURA

- **Vandermeer J 2010. How Populations Grow: The Exponential and Logistic Equations. Nature Education Knowledge 3(10): 15.**

link: <https://www.nature.com/scitable/knowledge/library/how-populations-grow-the-exponential-and-logistic-13240157>

<https://www.nature.com/scitable/knowledge/library/allee-effects-19699394>

- Wrzosek D 2010. Matematyka dla biologów.
- Foryś U. 2011. Modelowanie w biologii i medycynie.
- The Biology Project: <http://www.biology.arizona.edu/>
- Polecany filmik:

<https://www.youtube.com/watch?v=Kas0tIxDvrg&t=383s>



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

The Butterfly Effect.

