Błędy popełniane w trakcie doświadczenia

Doświadczalnictwo

Metoda badawcza to zestaw nierozłączny urządzenia i obsługującego człowieka lub ludzi. Każde urządzenie może dawać większe lub mniejsze pole do subiektywnej obsługi, w tym nie tylko wykorzystywania w doświadczeniu, ale np. kalibracji czy innej obsługi urządzenia.

Wykorzystując metodę badawczą nie znamy prawdziwej wartości tylko jej pomiar. Może się zdarzyć i często się zdarza, że pomiędzy obiektywną prawdą (nam nie znaną) a wynikiem z pomiaru występuje różnica. Ta różnica jest błędem.

Błędy dzielimy na dwa rodzaje – takie które występują zawsze – stałe – np. z powodu złej kalibracji wagi i takie które są przypadkowe – losowe – bo na chwilę zmienią się warunki w laboratorium lub w innym miejscu pobierania wartości.

Błąd systematyczny to brak dokładności – metoda jest niedokładna jeśli ten błąd występuje.

Błąd losowy to brak precyzji – metoda jest nieprecyzyjna jeśli ten błąd występuje.

Jednocześnie mogą wystąpić obydwa rodzaje błędu lub jeden z nich lub żaden.

Na dwóch kolejnych obrazkach jest pokazane na przykładzie (tarcza – zakładamy że środek tarczy to obiektywna prawda) metody o jednakowej precyzji a różnej dokładności

Jednakowej dokładności a różnej precyzji.

I podsumowanie czterech możliwości połączeń błędów. Tutaj na tarczy widać brak precyzji lub dokładności ale faktycznie my nie wiemy gdzie jest środek tarczy. Jeśli powtórzenia pomiarów sa podobne do siebie – maja mała zmienność – to możemy domniemywać, że metoda jest precyzyjna, ale o dokładności nic nie wiemy.

Te same połączenia błędów na obrazkach przy czym zakładamy, że wartość prawdziwa to wartość oczekiwana rozkładu zmiennej

To co jest na slajdzie wyraźnie tłumaczy jak radzić sobie z brakiem precyzji lub dokładności. Pierwszy błąd losowy może być łatwo zminimalizowany poprzez powtórzenia pomiarów i uwzględnianie kilku pomiarów lub średniej z kilku pomiarów.

Nie wiedząc czy metoda jest dokładna czy nie zakładamy że nie jest czyli zakładamy że występuje błąd systematyczny każdego pomiaru. Wtedy najlepiej jest przez cały czas trwania doświadczenia używać jednej metody a błędy systematyczne nie będą miały znaczenia przy porównaniach a takowe stosujemy w weryfikacji hipotez. Np. H0 o dwóch wartościach oczekiwanych ocenia różnicę między nimi a nia nie ma wpływu błąd systematyczny.

Kolejny możliwy błąd to błąd gruby. Jest on często konsekwencja pomyłki przy zapisie danych, przy przepisywaniu itd. W efekcie mamy zbiór liczb w których jedna lub dwie nie pasują – są za duże lub za małe. Aby sprawdzić, czy podejrzana liczba „pasuje” lub „nie pasuje” do zbioru danych powinno się dla zbioru bez tej liczby przygotować przedział tolerancji. Są dwa podejścia do przedziału tolerancji – albo stosuje się przedział ufności dla wartości oczekiwanej na poziomie istotności 0,05, albo stosuje się przedział typowej zmienności. Ten drugi będzie z reguły dłuższy choć zależy od liczebności próby. Moja rada – stosować ten który jest dłuższy bo jest mniej tolerancyjny.

Po utworzeniu przedziału – jeśli podejrzana liczba należy do przedziału przestaje być podejrzana, a jeśli nie należy jest nazywana błędem grubym i mamy pełne prawo usunąć ja ze zbioru danych.

W przykładzie na slajdzie – podejrzana jest wartość 4, na podstawie pozostałych 18 liczby tworzy przedziały. Do żadnego z nich liczba 4 nie należy zatem jest to liczba odstająca czyli błąd gruby.

Kolejny błąd to błąd przybliżania liczb. Wszyscy maja tendencję, aby ułamki zwykłe zapisać jako dziesiętne i je przybliżać czasem do niewielkiej liczby miejsc po przecinku. Jeśli chcemy dodać ½ + $^1/_3$ + $^1/_6$ to może się okazać, że przybliżenia nieprawidłowo zrobione dadzą nam wynik różny od 1.

Mamy liczbę prawdziwą (A) i przybliżamy ja czyli zmniejszamy liczbę miejsc po przecinku, uzyskuje liczbę przybliżona (a). Różnica między tymi liczbami jest bezwzględnym błędem przybliżenia, natomiast ta różnica podzielona przez liczbę prawdziwą nazywa się błędem względnym. Bardzo często stosując przybliżenie zakładamy maksymalną wielkość błędu względnego, zwykle oscylująca wokół 1 lub połowy procenta.

liczba dokładna (A)	liczba przybliżona (a)	błąd bezwzględny (a-A)	błąd względny $(a-A)/_A$
1,345672	1,35	0,004328	0,0032162
3,673779	3,67	-0,003779	-0,0010286
0,333333333	0,33	-0,003333333	-0,0100000
0,358208955	0,36	0,001791045	0,0050000
18,20943953	18,21	0,000560472	0,0000308
15,20689655	15,21	0,003103448	0,0002041
		0,002670632	-0,002577543
SUMA	39,13		
39,12732937	39,13	0,002670632	0,0000683
ILOCZYN	163,0254596		
163,4574042	163,46	0,002595762	0,0000159

Trochę przykładów przybliżania i konsekwencje dodawania i mnożenia liczb przybliżonych. Mamy porównanie wyników działań na liczbach prawdziwych i przybliżonych. Generalnie wniosek jest jeden – nie przybliżamy w trakcie obliczeń, jedyne co nam wolno to przybliżenie wyniku, głownie wykonywane dla lepszej prezentacji i przejrzystości liczb.

Efekty przybliżania

suma w grupie	n_i	A - średnia	a - przybliżenie	a n_i
10	3	3,33333	3,3	9,9
11	4	2,75	2,7	10,8
14	8	1,75	1,7	13,6
16	6	2,66667	2,7	16,2
8	3	2,66667	2,7	8,1
14	9	1,55556	1,6	14,4
20	6	3,33333	3,3	19,8
23	6	3,83333	3,8	22,8
116				115,6

Kolejny przykład przybliżania średnich podgrup, co przy obliczaniu średniej całości daje nam kumulowany większy błąd.

liczba dokładna (A)	liczba przybliżona (a)	bład bezwzględny (a-A)
1,455	1,46	0,005
2,465	2,47	0,005
4,315	4,32	0,005
0,185	0,19	0,005
7,135	7,14	0,005
3,625	3,63	0,005
19,18	19,21	0,03000

1,455	1,45	-0,005
2,465	2,46	-0,005
4,315	4,31	-0,005
0,185	0,18	-0,005
7,135	7,13	-0,005
3,625	3,62	-0,005
19,18	19,15	-0,03000

liczba dokładna (A)	liczba przybliżona (a)	bład bezwzględny (a-A)
1,455	1,46	0,005
2,465	2,46	-0,005
4,315	4,32	0,005
0,185	0,18	-0,005
7,135	7,14	0,005
3,625	3,62	-0,005
19,18	19,18	0,00000

Istnieje polska norma przybliżania liczb (Numer: PN-N-02120:1970). Jasne jest dodawanie do cyfry przybliżanej jedynki jeśli za przybliżaną cyfrą jest więcej niż połowa wartości tej cyfry. Np. Liczba 2,678 przybliżona do jednego miejsca po przecinku będzie równa 2,7. Jeśli za przybliżana liczba jest mniej niż połowa wartości przybliżanej cyfry to pozostawiamy cyfrę niezmieniona, czyli liczbę 3,623 przybliżymy do 3,2.

Problem się pojawia jeśli mamy dokładnie połowę wartości przybliżanej cyfry – jak na przykładzie powyżej. Przyjęcie jednego lub drugiego rozwiązania powoduje że błędy się kumulują co widać na wartości sumy. Dlatego w takiej sytuacji zależnie od parzystości lub nieparzystości lub nie cyfry przybliżanej stosujemy jedna z zasad. W przykładzie jeśli cyfra przybliżana jest nieparzysta to ja powiększamy o jeden a jeśli parzysta to zostawiamy. Taki sposób opisuje polska norma.

Przybliżenia

- Nie wolno przybliżać wyników obliczeń cząstkowych - przybliżane są końcowe wyniki
- Liczba miejsc po przecinku powinna być o jeden większa w stosunku do danych wejściowych
- Błąd względny jest ograniczany (np. poniżej 0,5%, czy 0,1%)

Podsumowanie co do zasad przybliżania.

Ostatnia kwestia to stosowanie właściwych wzorów do obliczeń. Właściwe wzory powinny charakteryzować się stabilnością numeryczną czyli brakiem wrażliwości na używanie przybliżonych lub nieprzybliżonych danych wejściowych.

Wzory na tym slajdzie są bardzo dydaktycznym przykładem stabilności numerycznej. Te dwa wzory są przekształconym tym samym wzorem i ten po lewej stronie majacy niewymierność w mianowniku nie bardzo się podoba, bo przecież na matematyce wkładają do głowy aby usuwać niewymierność z mianownika. Ten wzór po prawej jest z tego względu poprawny. Poniżej przekształcenie jednego z drugi.

- a=3
- b=0,01
- a+b=3,01

liczba miejsc po przecinku	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{(a+b)}$	1,7	1,73	1,735	1,7349	1,73494	1,734935
$\sqrt{a}$	1,7	1,73	1,732	1,7321	1,73205	1,732051
$\sqrt{(a+b)}-\sqrt{a}$	0	0	0,003	0,0028	0,00289	0,002884
$\frac{\sqrt{(a+b)}-\sqrt{a}}{b}$	0	0	0,3	0,28	0,289	0,2884
$\frac{1}{\sqrt{(a+b)}+\sqrt{a}}$	0,294118	0,289017	0,288434	0,288434	0,288435	0,288435

A tu jest przykład użycia tych dwóch wzorów przy założeniu wartości liczb a oraz b. Liczby dobrane są specjalnie aby widać było różnicę.

Pierwszy etap to obliczenie elementów które są potrzebne później do wzoru i ich przybliżanie (coś czego już wiadomo że nie powinno się robić). Czyli obliczony jest pierwiastek z a oraz z a+b, następnie wyniki przybliżone od jednego do sześciu miejsc po przecinku.

Zastosowanie wzoru bez niewymierności w mianowniku w przypadku przybliżania wartości cząstkowych to klęska jak widać na powyższym przykładzie. Ale wzór z niewymiernością nie poddaje się i jest znacznie mniej czuły na przybliżanie. Powiemy że jest stabilniejszy numerycznie.

A to jest dydaktyczny przykład układu równań z dwoma niewiadomymi bardzo niestabilnego numerycznie. Najpierw pierwotny układ a potem przybliżania współczynników przy niewiadomych. Proszę spojrzeć jak drobne przybliżenie zmienia wynik.

Stabilność numeryczna

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2}{N}\right)$$

Wzór na wariancje – prawy roboczy jest stabilniejszy numerycznie bo stosujemy dane wejściowe i nie ma średniej, która w lewym mogłaby być przybliżona.

Nie stosowanie przybliżeń powoduje, że nawet wzory niestabilne numerycznie dają precyzyjne wyniki.

Podsumowanie

- Jedna metoda zastosowana w doświadczeniu
- Uważna analiza danych – brak błędów grubych
- Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych
- Przybliżanie wyniku zgodnie z zasadą odpowiedniej wielkości błędu względnego

Zasady jak uniknąć błedów.

Cricetus cricetus