STATYSTYKA MATEMATYCZNA

Wanda Olech
Katedra Genetyki i Ochrony Zwierząt

wykład 1

Powtórzenie statystyki opisowej i podstaw rachunku prawdopodobieństwa

Zmienne losowe

Przedmiotem badań statystyki:

są zjawiska masowe występujące w przyrodzie lub społeczeństwie a dające się mierzyć np. produkcja wyrobów, zużycie materiałów, zatrudnienie, zjawiska demograficzne, tempo wzrostu itd.

Traktując te zjawiska jako losowe można zauważyć działanie przyczyn powodujących pewne prawidłowości. Przyczyny mogą być główne lub uboczne, ale ich działanie można zauważyć jedynie w większej masie przypadków (zjawiska masowe). Badania służące wyjaśnianiu tych przyczyn to badania statystyczne.

U podstaw współczesnej statystyki leży rachunek prawdopodobieństwa

Podstawowe pojęcia

- Zbiorowość statystyczna – zbiór jednostek (obserwacji) nie identycznych, ale stanowiących logiczną całość
- Zbiorowość (populacja) generalna – skończony lub nieskończony zbiór jednostek, które zamierzamy poddać obserwacji
- Próba – część (podzbiór) zbiorowości generalnej, która jest badana pod względem ustalonej cechy
- Próba losowa – losowo wybrane jednostki
- Cecha badana – właściwość jednostek zbiorowości, która może służyć do odróżnienia poszczególnych obserwacji

Własności próby

- Ma określoną liczebność (n)
- Jednorodność – należy do populacji generalnej
- Reprezentatywność względem populacji generalnej

Cechy statystyczne dzielimy na

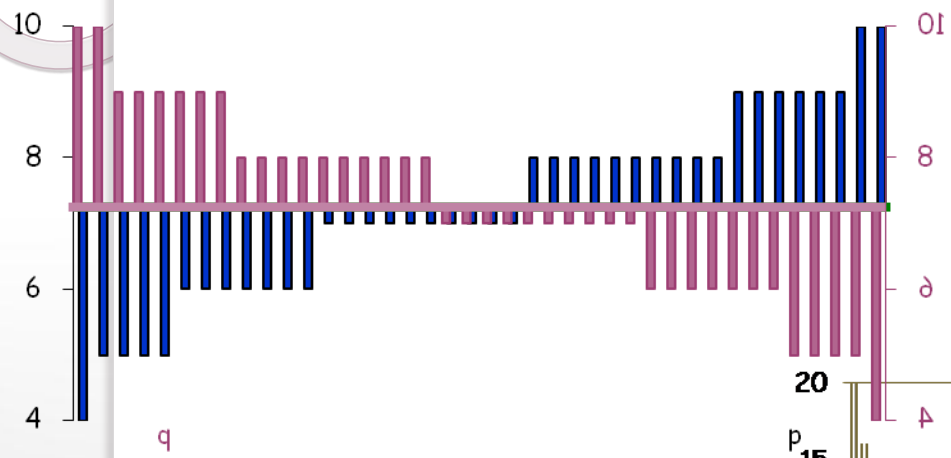
- Jakościowe – opisują jakości elementów zbiorowości, np. kolor oczu, wykształcenie, marka samochodu
- Ilościowe – wartości liczbowe

- skokowe – wartości są oddalone od siebie, np. liczba dzieci w rodzinie,
- ciągłe – wartości są w przedziale liczbowym, np. wzrost człowieka

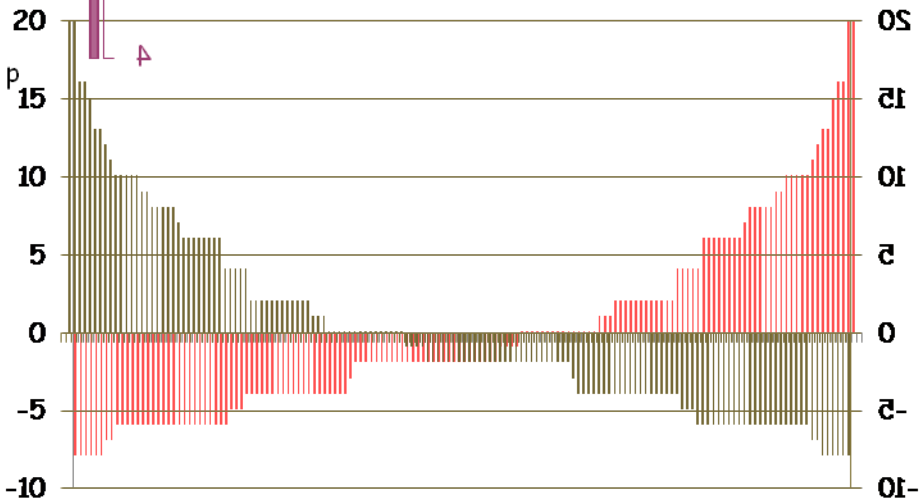
Opis próby - statystyka opisowa

- Uporządkowanie próby
- Prezentacja graficzna
- Parametry próby
- Porównania prób pod względem poziomu, zmienności i skośności

Porównania prób



średnia	7,250	9,908
odch.st.	1,446	6,006
V	0,199	0,606
A	-0,130	1,127



Rachunek prawdopodobieństwa – podstawowe pojęcia

- zdarzenie elementarne
- zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych to zdarzenie pewne (Ω)
  Zbiór Ω może być skończony lub nieskończony, przeliczalny lub nieprzeliczalny
- zdarzenie losowe (oznaczane np. przez A, B) jest podzbiorem Ω
- zdarzenie niemożliwe, to zbiór pusty $\varnothing$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa Laplace'a

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

n - liczba zdarzeń sprzyjających,

N - liczba wszystkich zdarzeń

lub

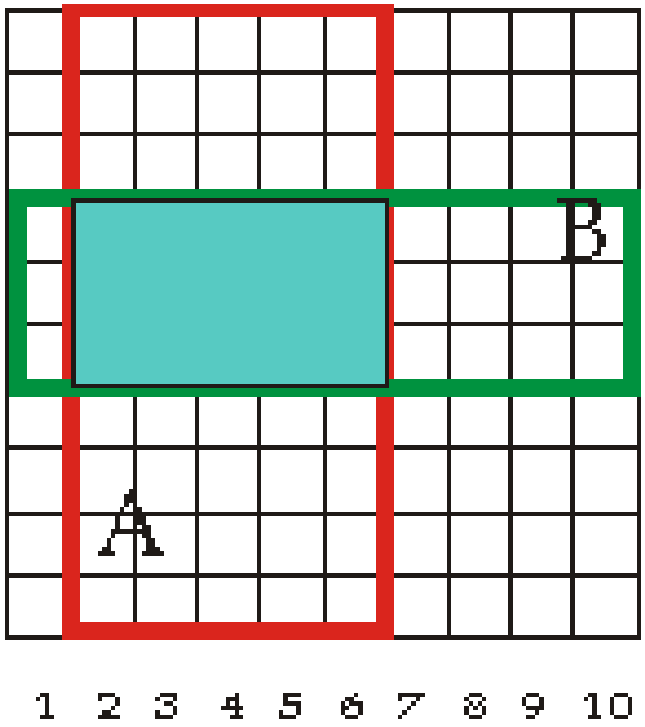
$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

gdzie $\overline{\overline{\Omega}}$ - miara Ω, $\overline{\overline{A}}$ - miara A

Niezależność

zdarzenia A i B są <u>niezależne</u> gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



$P(A) = {}^{50}/_{100} = 0,5$

$P(B) = {}^{30}/_{100} = 0,3$

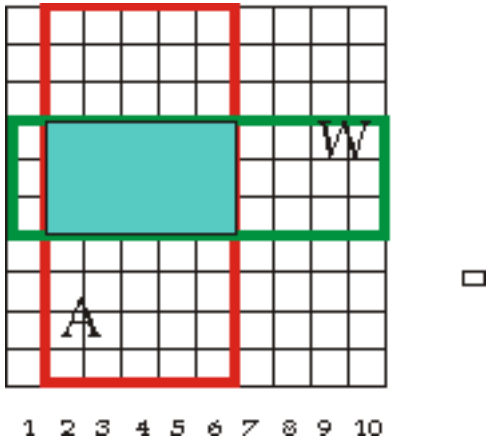
$P(A \cap B) = {}^{15}/_{100} =$

$0,15 = 0,5 \times 0,3$

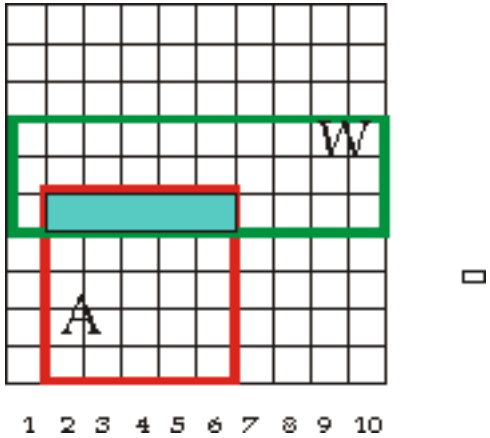
Prawdopodobieństwo warunkowe

prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem, że zajdzie zdarzenie W

$$P(A/W) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)}$$



P(A/W)=0,15/0,3=0,5

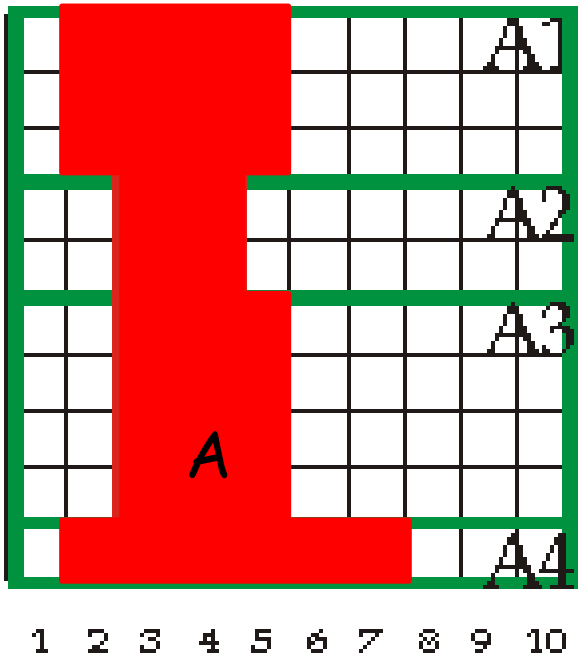


P(A/W)=0,05/0,3=1/6

Prawdopodobieństwo całkowite

$$P(A) = P(A/A_1)\cdot P(A_1) + P(A/A_2)\cdot P(A_2) + \ldots + P(A/A_n)\cdot P(A_n)$$

Gdzie $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \Omega$



$P(A) = {}^{12}/_{30} \cdot 0{,}3 + {}^{4}/_{20} \cdot 0{,}2 +$

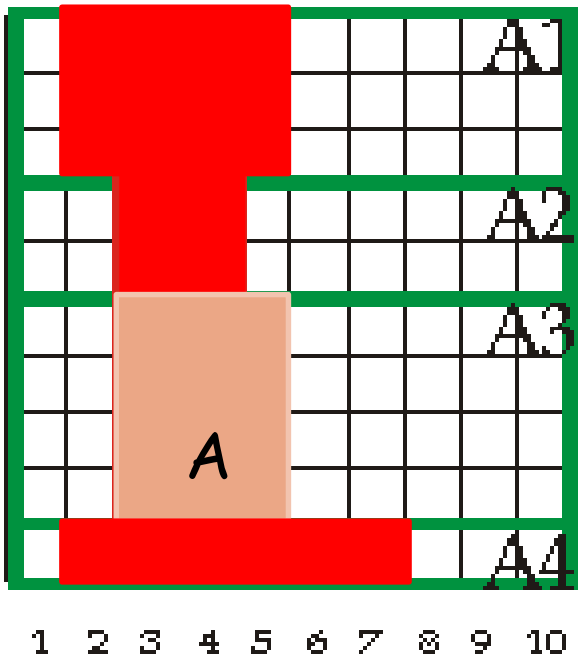
$+ {}^{12}/40 \cdot 0{,}4 + {}^{6}/_{10} \cdot 0{,}1 =$

$= 0{,}12 + 0{,}04 + 0{,}12 + 0{,}06 =$

$= 0{,}34$

wzór Bayes'a na wielkość prawdopodobieństwa a'posteriori

$$P(A_i / A) = \frac{P(A / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A / A_i) \cdot P(A_i)}$$



$$P(A3/A) = ({}^{12}/_{40} \cdot 0{,}4)/0{,}34 = {}^{0{,}12}/_{0{,}34} = {}^{6}/_{17}$$

Zmienne losowe

Zmienna losowa

Zmienna losowa jest funkcją, w której każdej wartości $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$ odpowiada pewien podzbiór zbioru $\mathbf{\Omega}$ będący zdarzeniem losowym.

Zmienna losowa powstaje poprzez przyporządkowanie każdemu zdarzeniu elementarnemu liczby rzeczywistej. Wtedy wartość zmiennej losowej ma swoje prawdopodobieństwo.

Czyli zmienna losowa ma wartości oraz ich prawdopodobieństwo

Typy zmiennej losowej

Ze względu na rodzaj zbioru zdarzeń elementarnych (skończony, nieskończony, przeliczalny, nie przeliczalny) wyróżniamy typy zmiennych losowych:

- zmienna losowa skokowa - gdy Ω skończony lub nieskończony ale przeliczalny
- zmienna losowa ciągła - gdy Ω nie przeliczalny i jest przedziałem lub sumą przedziałów

Funkcja rozkładu

Funkcję przyporządkowującą każdej wartości zmiennej losowej odpowiednie prawdopodobieństwo nazywamy funkcją prawdopodobieństwa zmiennej losowej

- funkcją rozkładu prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej **skokowej**
- funkcją gęstości dla zmiennej losowej **ciągłej**

funkcja rozkładu prawdopodobieństwa

$$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$$

oraz

$$\sum_i f(x_i) = \sum_i p_i = 1$$

funkcja gęstości

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{dla} \qquad x \in R$$

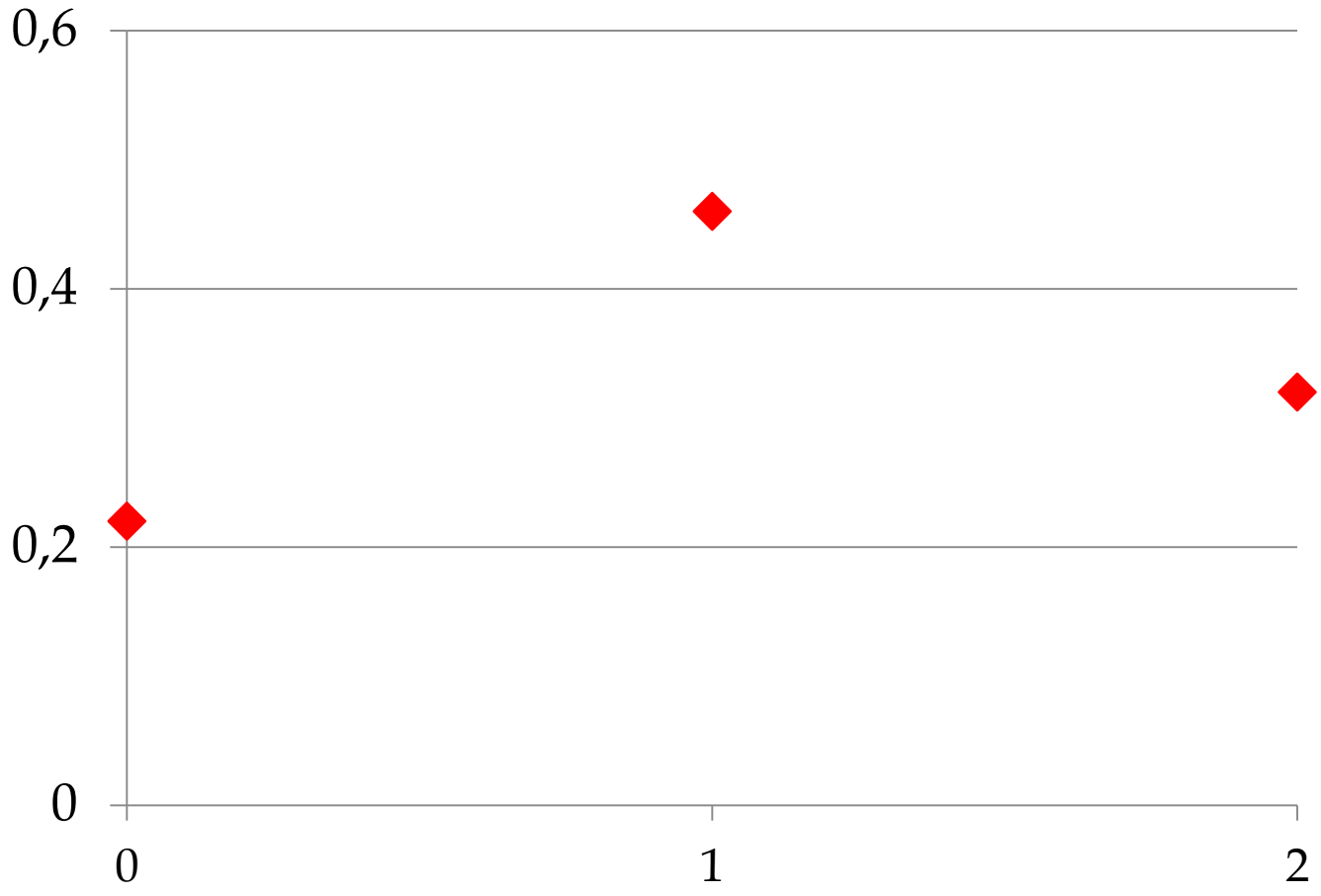
oraz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Zmienna losowa skokowa - przykład

x_i	$f(x_i)=p_i$
0	0,22
1	0,46
2	0,32
suma	1

Wykres f.r.p.



Przykład

Czy w tabeli przedstawiano rozkład zmiennej losowej?

x_i	p_i
2	0,22
5	0,12
8	0,16
9	0,36
11	0,14

Dystrybuanta zmiennej losowej - F(x)

Możemy utworzyć funkcję taka, która określi prawdopodobieństwo, że zmienna losowa nie przekroczy wartości tej funkcji:

$$F(x_0) = F(X = x_0) = P(X \leq x_0)$$

funkcję tę nazywamy dystrybuantą zmiennej losowej

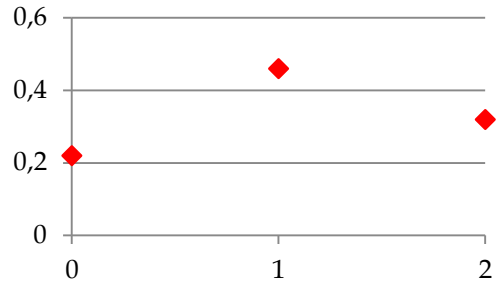
$$F(x_o) = P(X \leq x_0) = \sum_{x_i \leq x_0} P(x_i) = \sum_{x_i \leq x_0} p_i$$

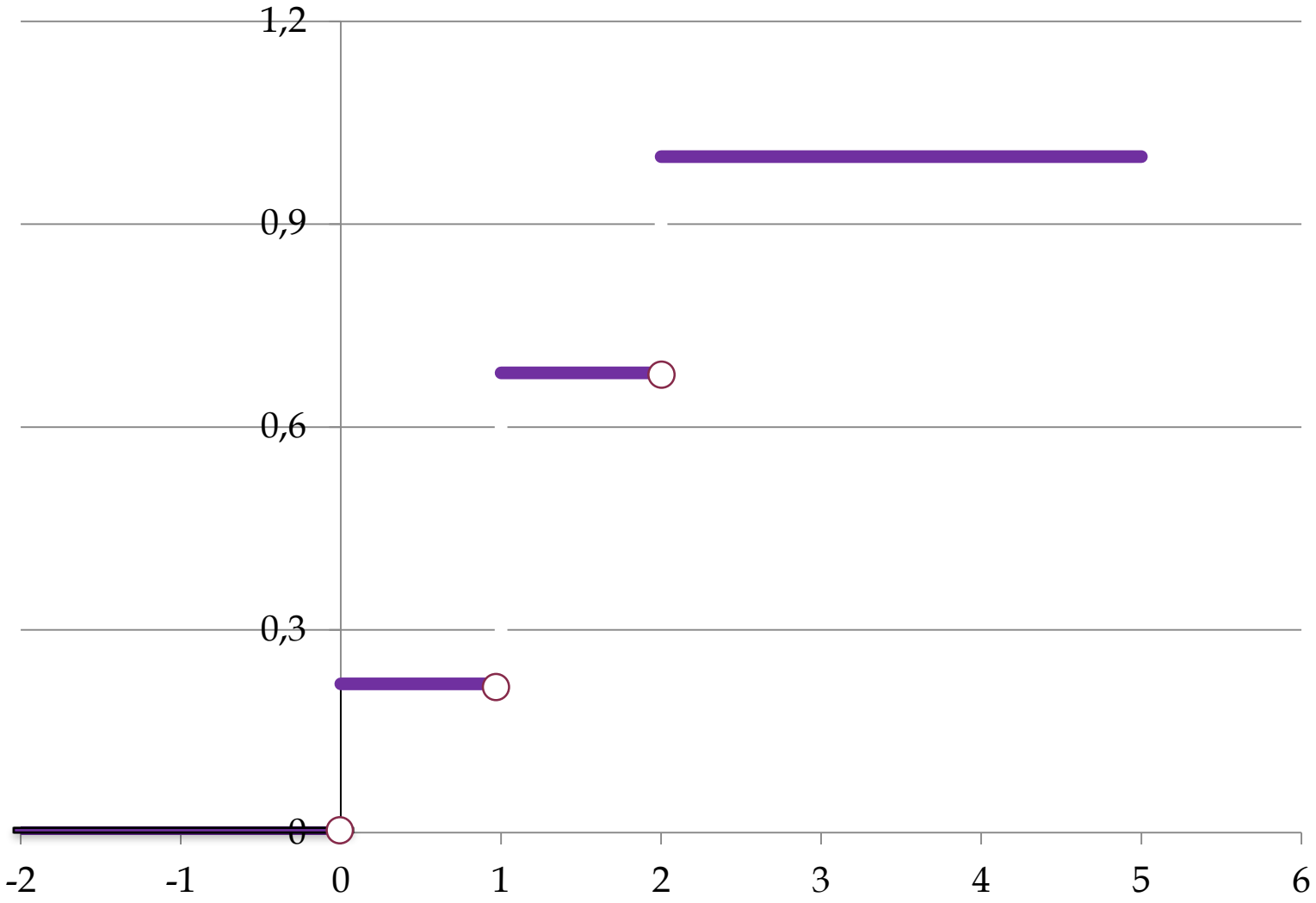
Dystrybuanta F(x)

x_i	p_i	$F(x_i)$
0	0,22	0,22
1	0,46	0,68
2	0,32	1
razem	1	

kumulacja prawdopodobieństwa

Dystrybuanta





Własności dystrybuanty

- ograniczona (wynika z własności prawdopodobieństwa)
- prawostronnie ciągła
- niemalejąca
- określona dla liczb rzeczywistych

Przykład

x_i	$F(x_i)$
$(-\infty;-2)$	0
$\langle -2;1)$	0,14
$\langle 1;5)$	0,32
$\langle 5;6)$	0,65
$\langle 6;7)$	0,81
$\langle 7;\infty)$	1

Określić f.r.p.

x_i	$f(x_i)=p_i$
-2	0,14
1	0,18
5	0,33
6	0,16
7	0,19
suma	1

Przykład

x_i	$F(x_i)$
2	0,35
3	0,66
4	1

Które zdanie jest prawdą

$$P(3 < X < 4) = F(X = 4) - F(X = 3) = 1 - 0{,}66 = 0{,}34$$

$$P(3 \leq X < 4) = F(X = 4) - F(X = 3) = 1 - 0{,}66 = 0{,}34$$

$$P(3 < X \leq 4) = F(X = 4) - F(X = 3) = 1 - 0{,}66 = 0{,}34$$

$$P(3 \leq X \leq 4) = F(X = 4) - F(X = 3) = 1 - 0{,}66 = 0{,}34$$

Parametry zmiennej losowej

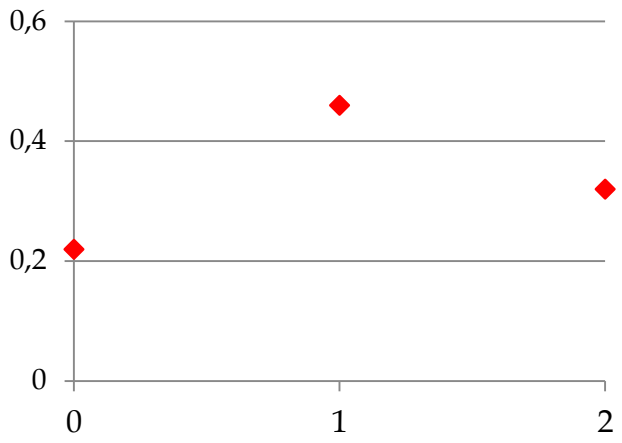
- EX – wartość oczekiwana
- D^2X – wariancja
- DX – odchylenie standardowe
- inne, np. kwantyle, mediana, wartość modalna itd.

Wartość oczekiwana

$$EX = \sum_i x_i \cdot p_i$$

Wartość oczekiwana EX wyznacza położenie najbardziej prawdopodobnej wartości zmiennej losowej

Wartość oczekiwana



$$EX = \sum_i x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0{,}22 + 1 \cdot 0{,}46 + 2 \cdot 0{,}32 =$$

$$= 0 + 0{,}46 + 0{,}64 = 1{,}1$$

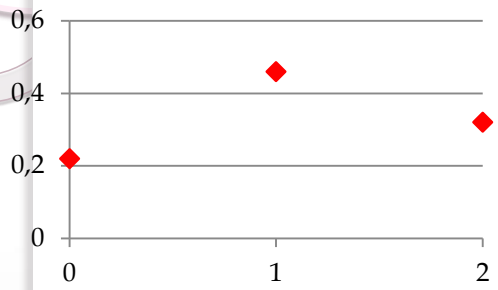
Wariancja

$$D^2 X = \sum_i (x_i - EX)^2 \cdot p_i =$$

$$= \sum_i x_i^2 \cdot p_i - EX^2$$

Wariancja jest miarą rozrzutu wartości zmiennej losowej wokół wartości oczekiwanej

Wariancja



$$D^2X = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - EX^2 = 0^2 \cdot 0{,}22 + 1^2 \cdot 0{,}46 + 2^2 \cdot 0{,}32 - 1{,}1^2 =$$

$$= 0 + 0{,}46 + 1{,}28 - 1{,}21 = 0{,}53$$

Odchylenie standardowe

$$DX = \sqrt{D^2 X}$$

Przedział typowej zmienności

$$(EX - DX; EX + DX)$$

Wskaźnik zmienności

$$VX = \frac{DX}{EX}$$

EX	1,1
D^2X	0,53
DX	0,7280
VX	0,6618

Kwantyle

Kwantylem rzędu q zmiennej losowej X jest taka liczba x_q, że

$$P(X \le x_q) = q \text{ czyli } F(x_q) = q$$

Kwantyl rzędu $^1/_2$ nazywamy medianą (Me), lub inaczej wartością środkową (ED_{50} - *dosis effectiva* - mediana dawek efektywnych, LD_{50} - *dosis lethal* - mediana dawek śmiertelnych - w medycynie czy przy truciznach).

- Kwantyle $^k/_4$ dla k=1,2,3 to kwartyle
- Kwantyle $^k/_{10}$ dla k=1,2...9 to decyle
- Kwantyle $^k/_{100}$ dla k=1,2...99 to centyle

Wartość środkowa - mediana

Mediana (Me) to kwantyl rzędu 0,5

$$P(X \leq x_{0,5}) = 0{,}5$$

$$czyli$$

$$F(x_{0,5}) = 0{,}5$$

Jeżeli EX = Me to rozkład zmiennej losowej jest symetryczny

Wartość modalna

Wartość modalna (Mo) to taka wartość zmiennej losowej X dla której funkcja rozkładu ma największą wartość.

Rozkład może być jedno i wielomodalny

Współczynnik asymetrii

Współczynnik asymetrii (skośności) rozkładu zmiennej losowej X :

$$\gamma_1 = \sum_i \frac{(x_i - EX)^3 \cdot p_i}{D^3 X}$$

Dla rozkładów jednomodalnych:

$$\gamma'' = \frac{EX - Mo}{DX}$$

Gdy $\gamma_1 = 0$ to rozkład symetryczny

Przykład

W klatce znajdują się cztery białe myszy i dwie szare. Myszy przechodzą tunelem do innej klatki, przy czym zakładamy, że wchodzą do tunelu niezależnie. Wartością zmiennej losowej jest numer pierwszej szarej myszy przechodzącej tunelem. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej.

Obliczyć EX, DX zmiennej losowej

1	$5/15$
2	$4/15$
3	$3/15$
4	$2/15$
5	$1/15$

$$EX = 1\cdot\frac{5}{15} + 2\cdot\frac{4}{15} + 3\cdot\frac{3}{15} + 4\cdot\frac{2}{15} + 5\cdot\frac{1}{15} =$$

$$= \frac{5+8+9+8+5}{15} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$$

$$D^2X = 1^2\cdot\frac{5}{15} + 2^2\cdot\frac{4}{15} + 3^2\cdot\frac{3}{15} + 4^2\cdot\frac{2}{15} + 5^2\cdot\frac{1}{15} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{5+16+27+32+25}{15} - \frac{49}{9} = \frac{105}{15} - \frac{49}{9} = \frac{63-49}{9} = \frac{14}{9}$$

Przykład

Zmienna losowa ma trzy wartości.
Wiadomo, że P(X=2) = 3*P(X=4); P(X=6) = 2*P(X=2)
Wyznaczyć rozkład zmiennej i obliczyć parametry

x_i	p_i
2	0,30
4	0,10
6	0,60
	1,00

$$EX = 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}6 = 0{,}6 + 0{,}4 + 3{,}6 = 4{,}6$$

$$D^2X = 2^2\cdot 0{,}3 + 4^2\cdot 0{,}1 + 6^2\cdot 0{,}6 - 4{,}6^2 =$$

$$= 1{,}2 + 1{,}6 + 21{,}6 - 21{,}16 = 3{,}24$$

$$DX = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8$$

$$VX = \frac{1{,}8}{4{,}6} = 0{,}391 = 39{,}1\%$$

$$(4{,}6 - 1{,}8\,;\, 4{,}6 + 1{,}8) = (2{,}8\,;\, 6{,}4)$$

$$\gamma = \frac{(2-4{,}6)^3\cdot 0{,}3 + (4-4{,}6)^3\cdot 0{,}1 + (6-4{,}6)^3\cdot 0{,}6}{1{,}8^3} =$$

$$= \frac{-17{,}576\cdot 0{,}3 - 0{,}216\cdot 0{,}1 + 2{,}744\cdot 0{,}6}{5{,}832} =$$

$$= \frac{-5{,}2728 - 0{,}0216 + 1{,}6464}{5{,}832} = \frac{-3{,}648}{5{,}832} = -0{,}626$$

$$Me = 6\cdot \qquad Mo = 6$$

$$Q_1 = 2$$

$$Q_3 = 6$$

Przykład

Zmienna losowa przedstawiona jest w tabeli
Wyznaczyć rozkład zmiennej i obliczyć parametry

x_i	p_i
1	0,40
2	0,20
3	0,10
4	0,10
5	0,20

$$EX = 1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}1 + 5\cdot 0{,}2 =$$
$$= 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}4 + 1 = 2{,}5$$

$$D^2X = 1^2\cdot 0{,}4 + 2^2\cdot 0{,}2 + 3^2\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}1 + 5^2\cdot 0{,}2 - 2{,}5^2 =$$
$$= 0{,}4 + 0{,}8 + 0{,}9 + 1{,}6 + 5 - 6{,}25 = 8{,}7 - 6{,}25 = 2{,}45$$

$$DX = \sqrt{2{,}45} = 1{,}565 \qquad VX = \frac{1{,}565}{2{,}5} = 0{,}626 = 62{,}6\%$$

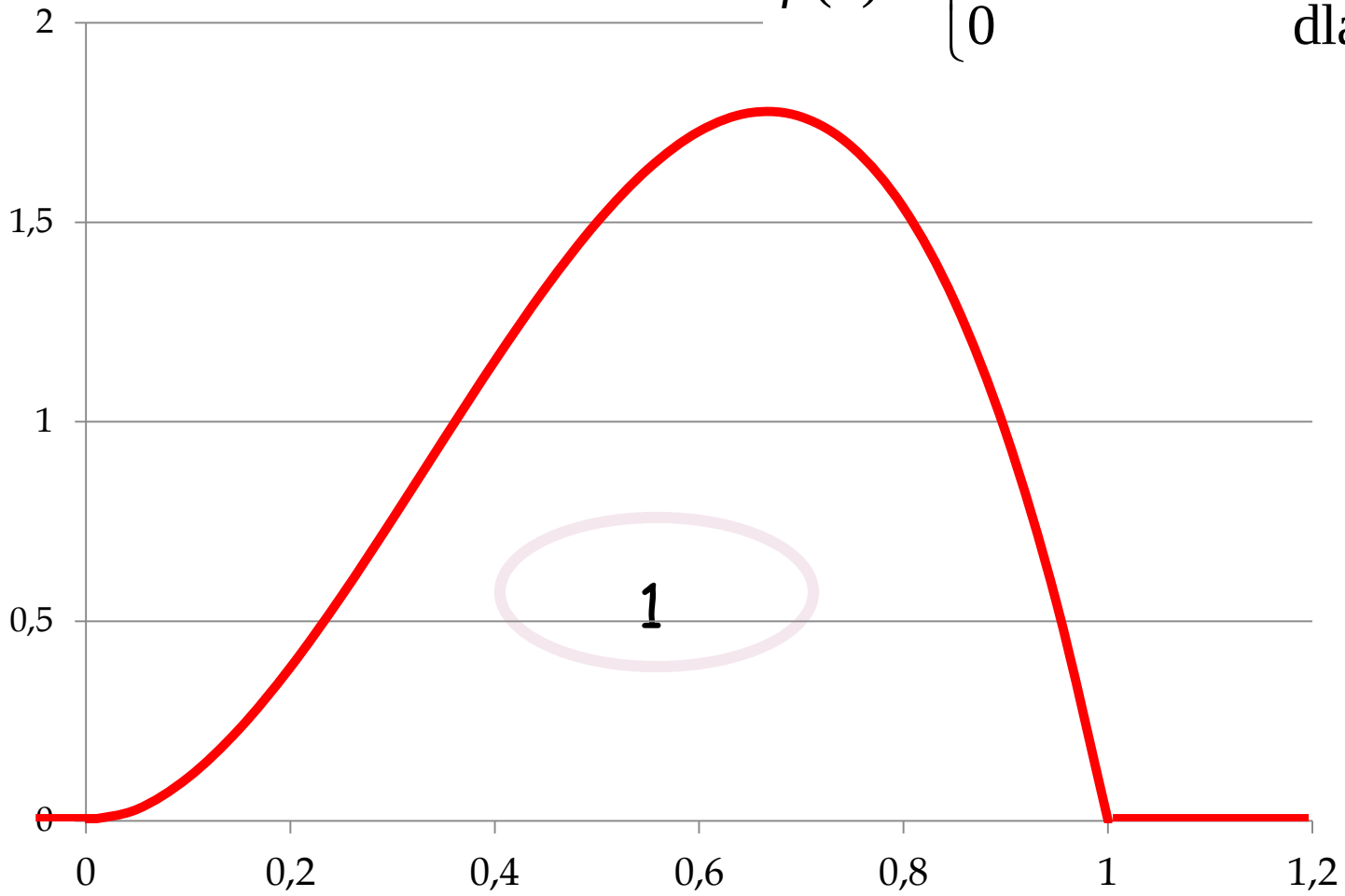
$$(2{,}5 - 1{,}565\,;\, 2{,}5 + 1{,}565) = (0{,}935\,;\, 4{,}065)$$

$$\gamma = \frac{(-1{,}5)^3\cdot 0{,}4 + (-0{,}5)^3\cdot 0{,}2 + (0{,}5)^3\cdot 0{,}1 + (1{,}5)^3\cdot 0{,}1 + (2{,}5)^3\cdot 0{,}2}{1{,}565^3} =$$
$$= \frac{-3{,}375\cdot 0{,}4 - 0{,}125\cdot 0{,}2 + 0{,}125\cdot 0{,}1 + 3{,}375\cdot 0{,}1 + 15{,}625\cdot 0{,}2}{3{,}835} =$$
$$= \frac{-1{,}35 - 0{,}025 + 0{,}0125 + 0{,}3375 + 3{,}125}{3{,}835} = \frac{2{,}1}{3{,}835} = 0{,}548$$

$$Me = 2 \qquad Mo = 1$$
$$Q_1 = 1$$
$$Q_3 = 4$$

Zmienna losowa ciągła

$$f(x) = \begin{cases} 12(x^2 - x^3) & \text{dla } x \in (0,1) \\ 0 & \text{dla } x \notin (0,1) \end{cases}$$



Podstawy rachunku całkowego

F(x) jest funkcją pierwotną dla f(x)

$$\bigwedge_{x \in R} F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Podstawowe wzory

$$\int 0dx = C \qquad \int 1dx = x + C$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \; a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Przykład

$$f(x)=\begin{cases}12(x^2-x^3) & \text{dla } x\in(0,1)\\ 0 & \text{dla } x\notin(0,1)\end{cases}$$

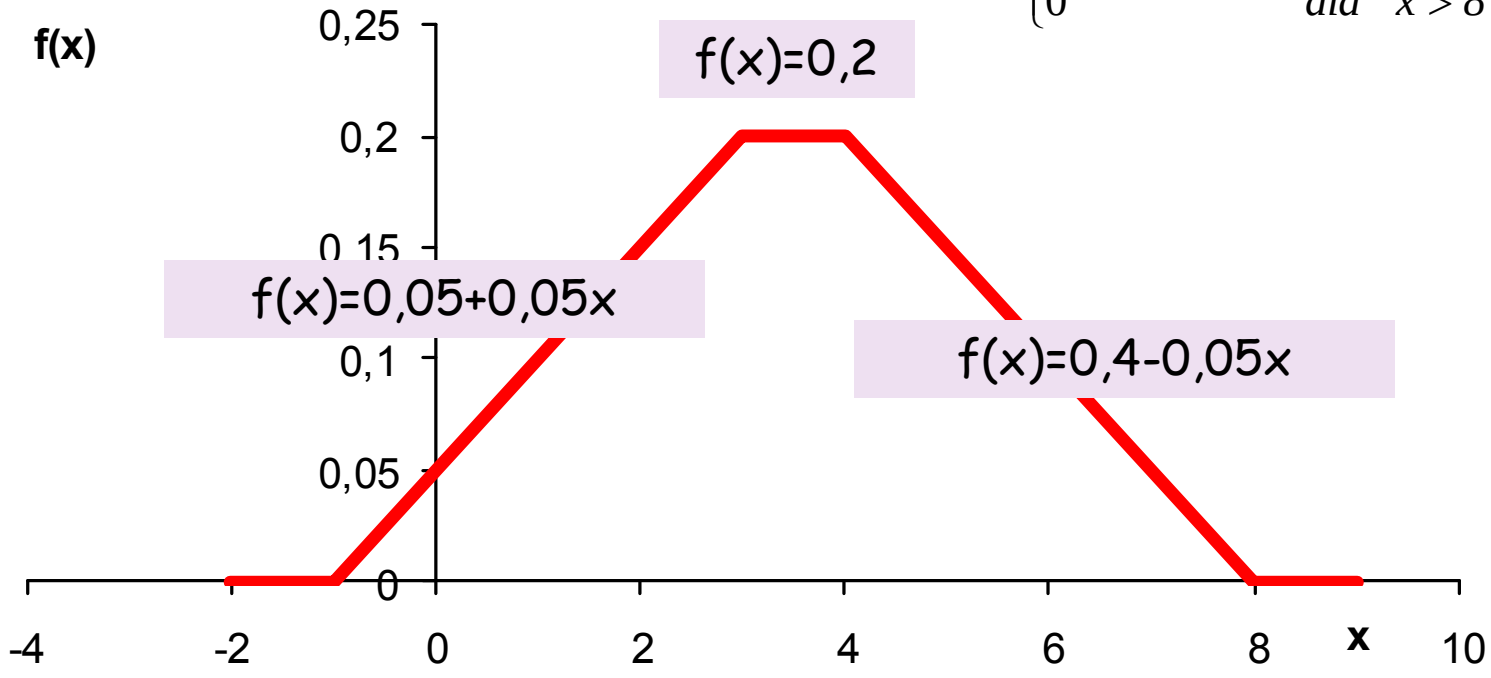
$$\int f(x)dx=\begin{cases}\int 0=0 & dla\ x<0\\ \int(12x^2-12x^3)dx & dla\ 0\le x\le 1\\ \int 0=0 & dla\ x>1\end{cases}$$

$$\int f(x)dx=\int_0^1(12x^2-12x^3)dx=\left|12\frac{x^3}{3}\right|_0^1-\left|12\frac{x^4}{4}\right|_0^1=$$

$$=\left|4x^3\right|_0^1-\left|3x^4\right|_0^1=(4-0)-(3-0)=1$$

Zm. ciągła - przykład

$$f(x) = \begin{cases} 0 & dla \;\; x < -1 \\ 0{,}05 + 0{,}05x & dla \;\; -1 \le x \le 3 \\ 0{,}2 & dla \;\; 3 < x \le 4 \\ 0{,}4 - 0{,}05x & dla \;\; 4 < x \le 8 \\ 0 & dla \;\; x > 8 \end{cases}$$



Zm. ciągła - przykład

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{3}(0{,}05+0{,}05x)dx + \int_{3}^{4}(0{,}2)dx + \int_{4}^{8}(0{,}4-0{,}05x)dx =$$

$$[0{,}05x+0{,}05\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{3} + \left|0{,}2x\right|_{3}^{4} + \left|0{,}4x-0{,}05\frac{x^2}{2}\right|_{4}^{8} =$$

$$=\{(0{,}05\cdot 3+0{,}025\cdot 3^2)-(0{,}05\cdot(-1)+0{,}025\cdot(-1)^2)\}+$$

$$+\{0{,}2\cdot 4-0{,}2\cdot 3\}+$$

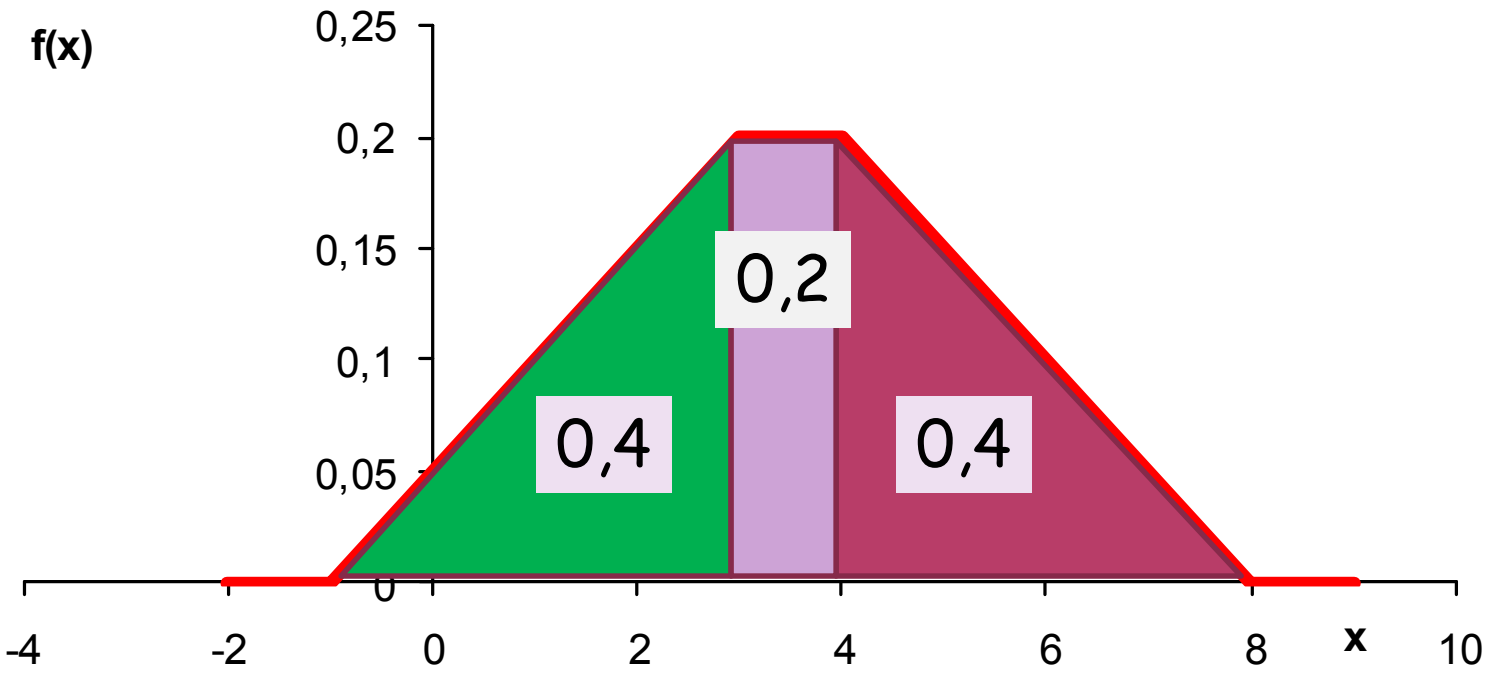
$$+\{(0{,}4\cdot 8-0{,}025\cdot 8^2)-(0{,}4\cdot 4-0{,}025\cdot 4^2)\}=$$

$$=\{(0{,}15+0{,}225)-(-0{,}05+0{,}025)\}+\{0{,}8-0{,}6\}+$$

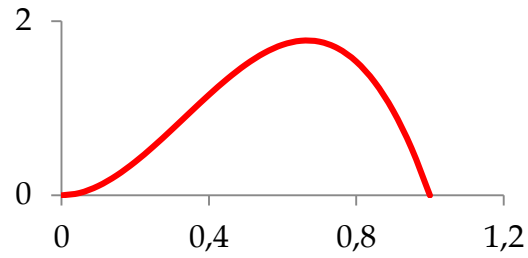
$$+\{(3{,}2-1{,}6)-(1{,}6-0{,}4)\}=$$

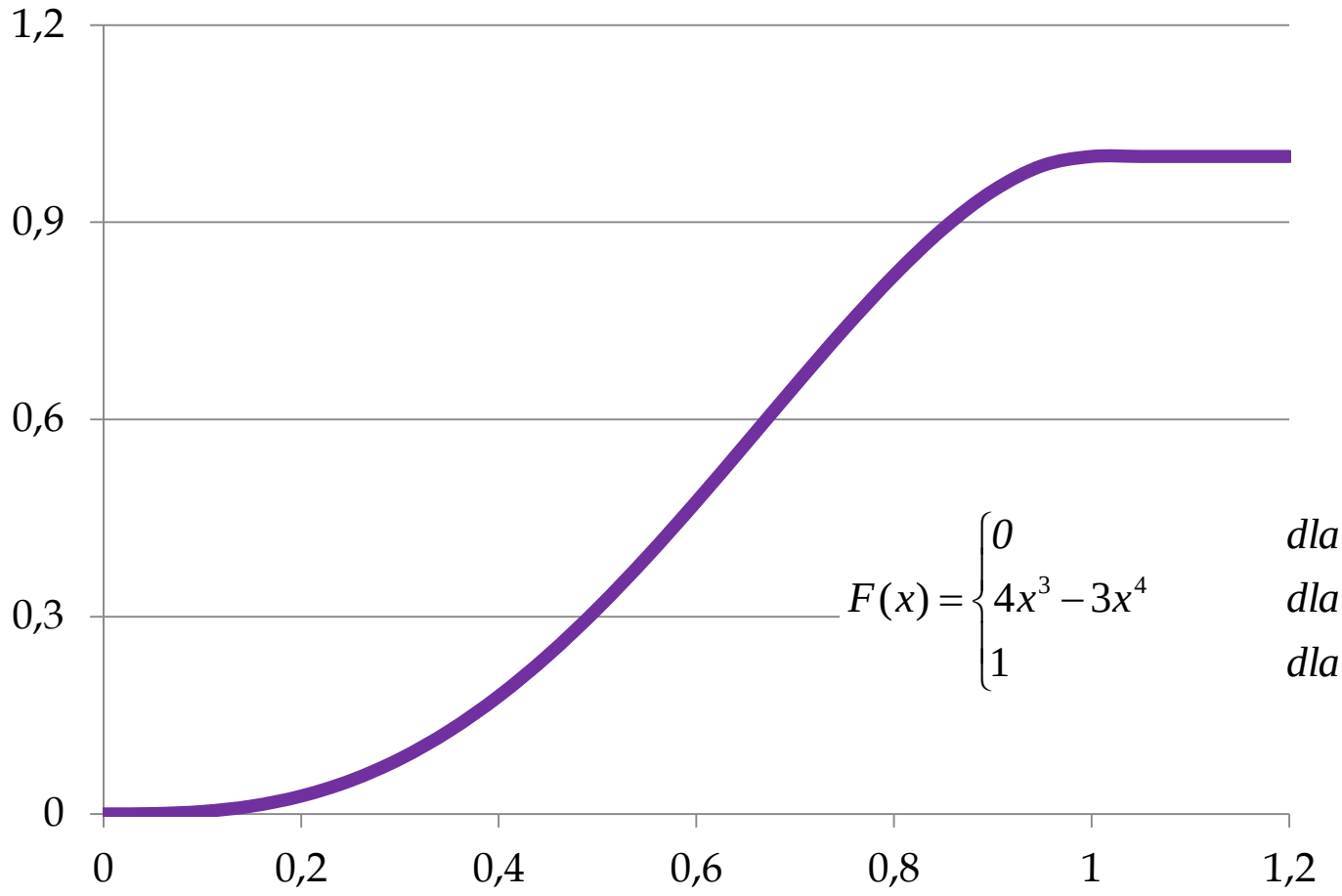
$$=\{0{,}375+0{,}025\}+\{0{,}2\}+\{1{,}6-1{,}2\}=0{,}4+0{,}2+0{,}4=1$$

Zm. ciągła - przykład



Dystrybuanta

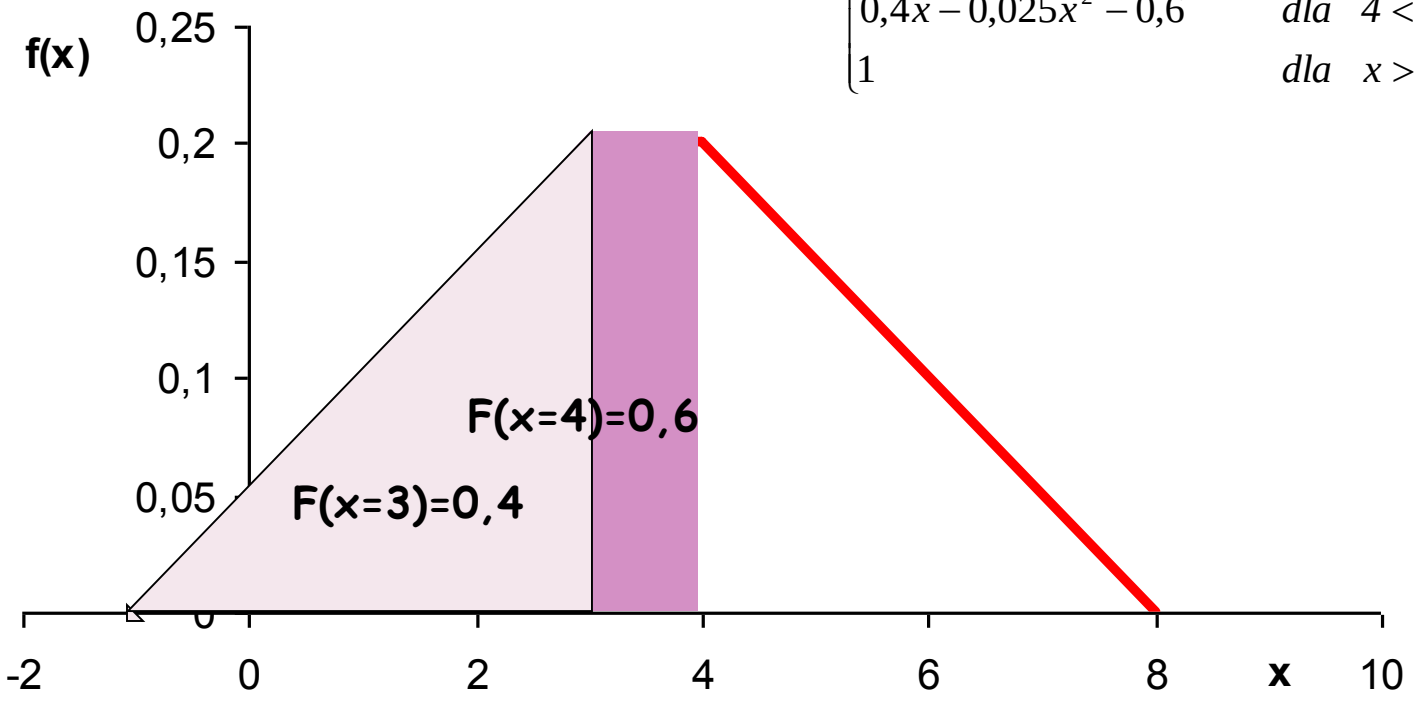




$$F(x) = \begin{cases} 0 & dla\ x < 0 \\ 4x^3 - 3x^4 & dla\ 0 \le x \le 1 \\ 1 & dla\ x > 1 \end{cases}$$

Zastosowanie dystrybuanty

$$F(x)=\begin{cases} 0 & dla \;\; x<-1 \\ 0{,}05x+0{,}025x^2+0{,}025 & dla \;\; -1\le x\le 3 \\ 0{,}2x-0{,}2 & dla \;\; 3<x\le 4 \\ 0{,}4x-0{,}025x^2-0{,}6 & dla \;\; 4<x\le 8 \\ 1 & dla \;\; x>8 \end{cases}$$



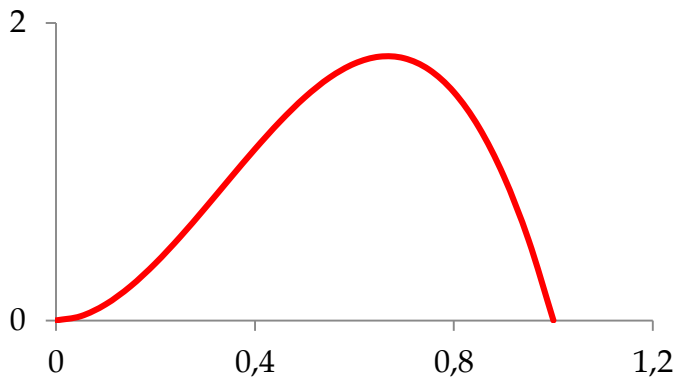
P(3<X<4)=F(X=4)-F(X=3)=0,6-0,4=0,2

Wartość oczekiwana

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Wartość oczekiwana EX wyznacza położenie najbardziej prawdopodobnej wartości zmiennej losowej

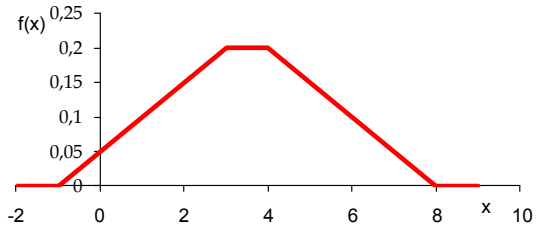
Wartość oczekiwana



$$EX = \int x \cdot f(x)dx = \int_0^1 (x \cdot 12x^2 - x \cdot 12x^3)dx = \left|12\frac{x^4}{4}\right|_0^1 - \left|12\frac{x^5}{5}\right|_0^1 =$$

$$= \left|3x^4\right|_0^1 - \left|2{,}4x^5\right|_0^1 = (3-0)-(2{,}4-0) = 0{,}6$$

Wartość oczekiwana



$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-1}^{3} (0{,}05x + 0{,}05x^2)dx + \int_{3}^{4} (0{,}2x)dx + \int_{4}^{8} (0{,}4x - 0{,}05x^2)dx =$$

$$[0{,}05\frac{x^2}{2} + 0{,}05\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3} + \Big|0{,}2\frac{x^2}{2}\Big|_{3}^{4} + \Big|0{,}4\frac{x^2}{2} - 0{,}05\frac{x^3}{3}\Big|_{4}^{8} =$$

$$= \{(0{,}025 \cdot 3^2 + 0{,}05 \cdot {}^{3^3}\!/_{3}) - (0{,}025 \cdot (-1)^2 + 0{,}05 \cdot {}^{(-1)^3}\!/_{3})\} +$$

$$+ \{0{,}1 \cdot 4^2 - 0{,}1 \cdot 3^2\} +$$

$$+ \{(0{,}2 \cdot 8^2 - 0{,}05 \cdot {}^{8^3}\!/_{3}) - (0{,}2 \cdot 4^2 - 0{,}05 \cdot {}^{4^3}\!/_{3})\} =$$

$$= \{(0{,}225 + 0{,}45) - (0{,}025 - {}^{0{,}05}\!/_{3})\} + \{1{,}6 - 0{,}9\} +$$

$$+ \{(12{,}8 - {}^{25{,}6}\!/_{3}) - (3{,}2 - {}^{3{,}2}\!/_{3})\} =$$

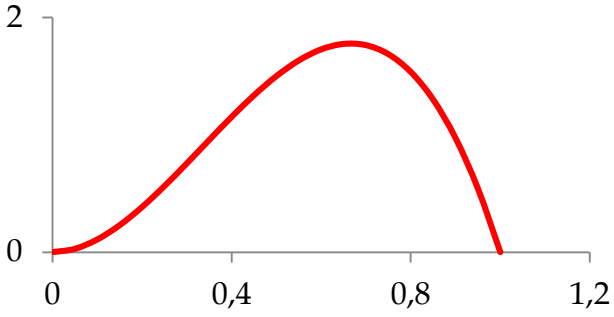
$$= \{0{,}65 + {}^{0{,}05}\!/_{3}\} + \{0{,}7\} + \{9{,}6 - {}^{22{,}4}\!/_{3}\} = 10{,}95 - {}^{22{,}35}\!/_{3} = 10{,}95 - 7{,}45 = 3{,}5$$

Wariancja

$$D^2X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(EX\right)^2$$

Wariancja jest miarą rozrzutu wartości zmiennej losowej wokół wartości oczekiwanej

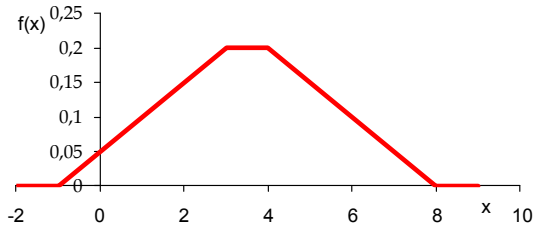
Wariancja



$$EX = \int x^2 \cdot f(x)dx - EX^2 = \int_0^1 (12x^4 - 12x^5)dx - 0{,}6^2 = \left|12\frac{x^5}{5}\right|_0^1 - \left|12\frac{x^6}{6}\right|_0^1 - 0{,}36 =$$

$$= \left|2{,}4x^5\right|_0^1 - \left|2x^6\right|_0^1 - 0{,}36 = (2{,}4 - 0) - (2 - 0) - 0{,}36 = 0{,}04$$

Wariancja



$$D^2X = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - EX^2 = \int_{-1}^{3}(0{,}05x^2 + 0{,}05x^3)dx + \int_{3}^{4}(0{,}2x^2)dx + \int_{4}^{8}(0{,}4x^2 - 0{,}05x^3)dx - 3{,}5^2 =$$

$$= [0{,}05\frac{x^3}{3} + 0{,}05\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{3} + \Big|0{,}2\frac{x^3}{3}\Big|_{3}^{4} + \Big|0{,}4\frac{x^3}{3} - 0{,}05\frac{x^4}{4}\Big|_{4}^{8} - 3{,}5^2 =$$

$$= \{(0{,}05\cdot {3^3}/{3} + 0{,}05\cdot {3^4}/{4}) - (0{,}05\cdot {(-1)}/{3}^3 + 0{,}05\cdot {(-1)^4}/{4})\} +$$

$$+ \{0{,}2\cdot {4^3}/{3} - 0{,}2\cdot {3^3}/{3}\} +$$

$$+ \{(0{,}4\cdot {8^3}/{3} - 0{,}05\cdot {8^4}/{4}) - (0{,}4\cdot {4^3}/{3} - 0{,}05\cdot {4^4}/{4})\} - 3{,}5^2 =$$

$$= \{(0{,}45 + 0{,}0125\cdot 81) - (-{0{,}05}/{3} + 0{,}0125)\} + \{{12{,}8}/{3} - 1{,}8\} +$$

$$+ \{({204{,}8}/{3} - 51{,}2) - ({25{,}6}/{3} - 3{,}2)\} - 3{,}5^2 =$$

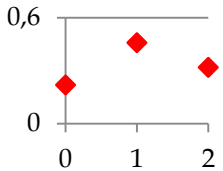
$$= \{1{,}45 + {0{,}05}/{3}\} + \{{12.8}/{3} - 1{,}8\} + \{{179{,}2}/{3} - 48\} - 12{,}25 = {192{,}05}/{3} - 60{,}6 = 64{,}0167 - 60{,}6 = 3{,}4167$$

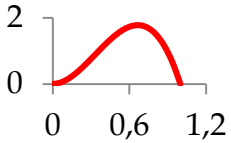
Odchylenie standardowe

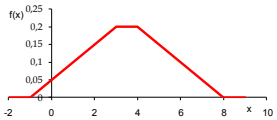
$$DX = \sqrt{D^2 X}$$

Wskaźnik zmienności

$$VX = \frac{DX}{EX}$$







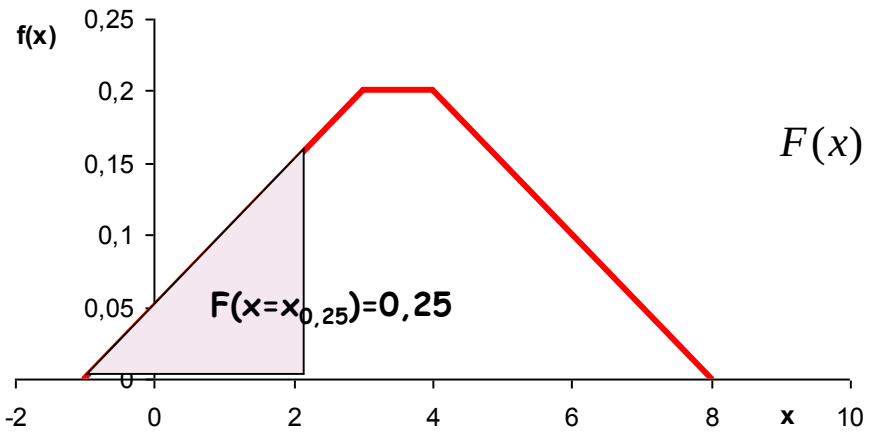
EX	1,1	0,6	3,5
D^2X	0,53	0,04	3,4167
DX	0,7280	0,2	1,8484
VX	0,6618	0,3333	0,5281

Kwantyle

Kwantylem rzędu q zmiennej losowej X jest taka liczba x_q, że

$$P(X \leq x_q) = q \text{ czyli } F(x_q) = q$$

Kwantyle



$$F(x) = \begin{cases} 0 & dla \;\; x < -1 \\ 0{,}05x + 0{,}025x^2 + 0{,}025 & dla \;\; -1 \le x \le 3 \\ 0{,}2x - 0{,}2 & dla \;\; 3 < x \le 4 \\ 0{,}4x - 0{,}025x^2 - 0{,}6 & dla \;\; 4 < x \le 8 \\ 1 & dla \;\; x > 8 \end{cases}$$

$$0{,}05x_{0,25} + 0{,}025x_{0,25}^2 + 0{,}025 = 0{,}25$$

$$0{,}025x_{0,25}^2 + 0{,}05x_{0,25} - 0{,}225 = 0$$

$$\Delta = 0{,}05^2 - 4 \cdot 0{,}025 \cdot (-0{,}225) = 0{,}0025 + 0{,}0225 = 0{,}025$$

$$x_{0,25} = (-0{,}05 + \sqrt{0{,}025}) / (2 \cdot 0{,}025) = 2{,}1623$$

Współczynnik asymetrii

Współczynnik asymetrii (skośności) rozkładu zmiennej losowej X :

$$\gamma_1 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^3 \cdot f(x)dx}{D^3 X}$$

Dla rozkładów jednomodalnych:

$$\gamma_1 = \frac{EX - Mo}{DX}$$

Gdy $\gamma_1 = 0$ to rozkład symetryczny

Przykład

Dla jakiej wartości parametru A dana funkcja może być funkcją gęstości zmiennej losowej X. Obliczyć EX, DX

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+A & \text{dla } 1\le x\le 4\\ 0 & \text{dla pozostalych}\end{cases}$$

$$A=-\frac{1}{3}$$

$$EX=\int_1^4 xf(x)dx=\int_1^4\left(\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{3}x\right)dx=\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}x^2\right)\Bigg|_1^4=\frac{16}{3}-\frac{16}{6}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{13}{6}$$

$$D^2X=\int_1^4 x^2f(x)dx-E^2X=\int_1^4\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{3}x^2\right)dx-\frac{169}{36}=$$

$$\int_1^4\left(x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^2\right)dx-\frac{169}{36}=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{9}x^3\right)\Bigg|_1^4-\frac{169}{36}=\frac{64}{5}-\frac{64}{9}-\frac{2}{5}+\frac{1}{9}-\frac{169}{36}=\frac{62}{5}-\frac{421}{36}=\frac{127}{180}$$

Ovis musimon