wykład :

Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa

STATYSTYKA OPISOWA

Wanda Olech

Katedra Genetyki i Ochrony Zwierząt

Statystyka zajmuje się

Zjawiskami losowymi - które bada przez doświadczenie

U podstaw współczesnej statystyki leży rachunek prawdopodobieństwa

podstawowe pojęcia

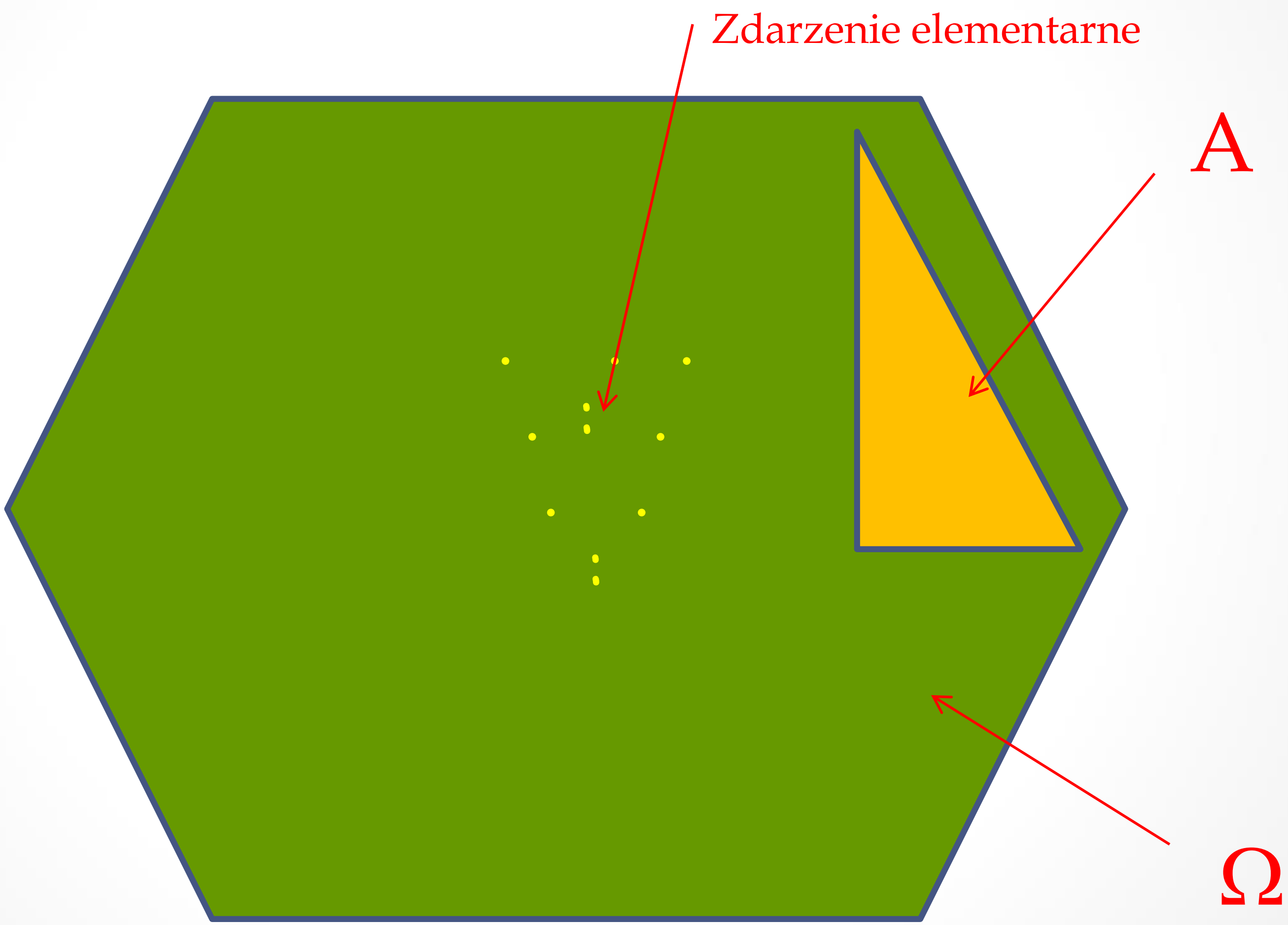
- zdarzenie elementarne (pojedynczy wynik doświadczenia losowego)
- zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych (zbiór wszystkich wyników doświadczenia losowego) to zdarzenie pewne (Ω)

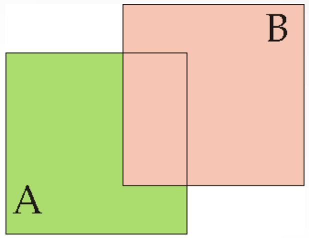
Zbiór Ω może być skończony lub nieskończony, przeliczalny lub nieprzeliczalny

- zdarzenie losowe (oznaczane np. przez A, B) jest podzbiorem Ω
- dopełnieniem zdarzenia A nazywamy zdarzenie A'=Ω - A

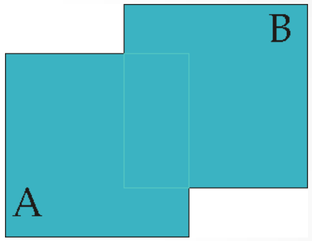
- zdarzenie niemożliwe, to zbiór pusty ∅

podstawowe pojęcia

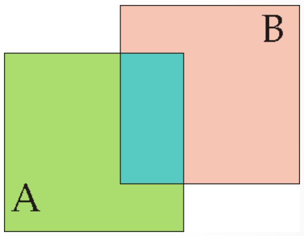




$A \cup B$: suma zdarzeń losowych (alternatywa)

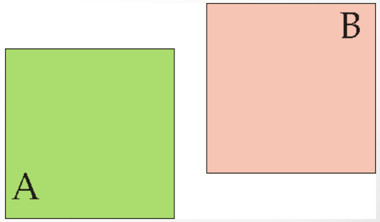


$A \cap B$: iloczyn zdarzeń (koniunkcja)

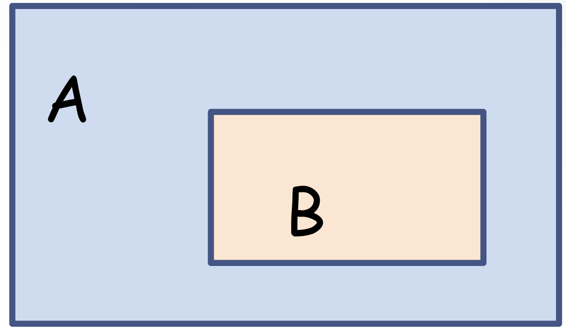


A i B są <u>zdarzeniami wykluczającymi</u>

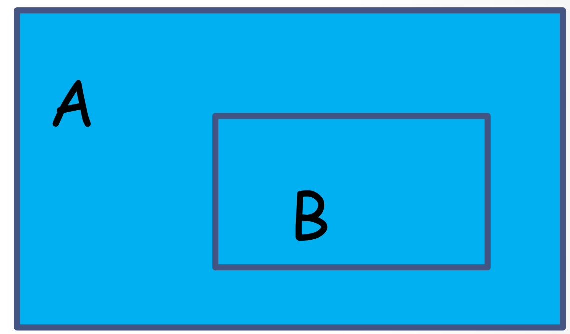
gdy $A \cap B = \varnothing$



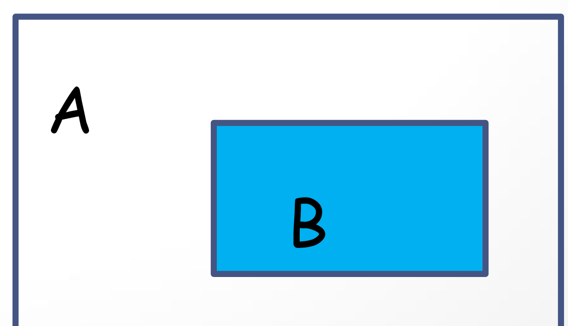
$\mathbf{B \subset A}$



$A \cup B$ = suma zdarzeń losowych (alternatywa)



$A \cap B$ = iloczyn zdarzeń (koniunkcja)



Klasyczna definicja prawdopodobieństwa Laplace'a

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

n - liczba zdarzeń sprzyjających,

N - liczba wszystkich zdarzeń

lub $$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

gdzie $\overline{\overline{\Omega}}$ - miara Ω, $\overline{\overline{A}}$ - miara A

Kombinatoryka

Dział matematyki, który zajmuje się obliczaniem liczebności zbiorów, które łączą w określony sposób elementy należące do skończonego zbioru (teoria zliczania).

Kiedy konieczne jest określenie liczby elementów danego zbioru?

proste zasady arytmetyczne używane w kombinatoryce:

- reguła dodawania
- reguła mnożenia

Reguła dodawania

Jeżeli dwa zdarzenia wzajemnie się wykluczają- nie mogą wystąpić jednocześnie, wtedy stosuje się regułę dodawania

Jeżeli zdarzenie *A* można zrealizować na n_1 sposobów, a zdarzenie *B* na n_2 sposobów oraz zdarzenia *A* i *B* wzajemnie się wykluczają to liczba sposobów w jakich realizują się oba zdarzenia wynosi: n_1+n_2

Jeżeli dany zbiór jest sumą rozłącznych parami podzbiorów i znana jest liczba elementów każdego podzbioru, to liczba elementów zbioru jest sumą liczb elementów wszystkich podzbiorów.

Reguła dodawania

W szafie jest:
3 pary spodni,
4 spódnice
2 sukienki
Jednocześnie można założyć albo spodnie albo sukienkę albo spódnicę
a więc zdarzenia te wzajemnie się wykluczają.

Liczba sposobów ubrania się
(zbiór ubrań) to:
3 lub 4 lub 2 czyli **3 + 4 + 2 =8**

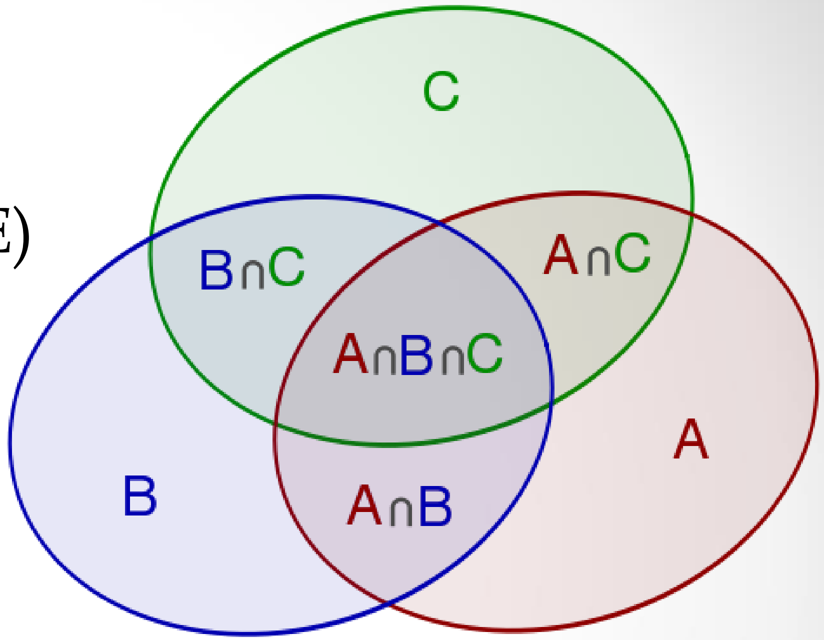
Reguła mnożenia

W szafie jest:
3 pary spodni,
4 bluzki
2 czapki
Jednocześnie można założyć spodnie oraz bluzkę oraz czapkę
a więc zdarzenia te są wzajemnie niezależne.

Liczba sposobów ubrania się
(zbiór ubrań) to:
3 i 4 i 2 czyli **3 x 4 x 2 = 24**

Reguła dodawania i mnożenia

Zasada włączeń- wyłączeń
Principle of Inclusion-Exclusion (PIE)



Jeżeli spośród dwóch zdarzeń
A i *B*, które mogą zrealizować się na n_1 i n_2 sposobów, może wystąpić tylko jedno, to od sumy wszystkich możliwych wyników należy odjąć liczbę tych, które są wspólne dla obu zdarzeń.

Reguła mnożenia

Jeżeli dane zdarzenie realizuje się wieloetapowo (etapy: 1 …*m*), przy czym w *k*-tym etapie można uzyskać n_k wyników, to liczba wszystkich wyników zdarzenia jest równa iloczynowi:

$$\boldsymbol{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m}$$

Reguła mnożenia

Bilet do kina to przydział miejsca w określonym rzędzie. W kinie jest 15 rzędów a w każdym z nich 50 foteli. Wybór rzędu jest niezależny od wyboru fotela, tak więc oba zdarzenia nie wykluczają się.

Liczba sposobów usadzenia widzów:
(zbiór kombinacji rzędów i miejsc) to:
15 i 50 czyli $15 \cdot 50 = 750$

Łączenie dodawania i mnożenia

Sejf otwiera się z dwóch stron: jedne drzwi są zamknięte kodem liczby dwucyfrowej (tylko cyfry nieparzyste), drugie kodem dwucyfrowym (tylko cyfry parzyste). Wystarczy złamać kod pierwszy lub drugi aby dostać się do środka. Na ile sposobów można to zrobić?

Kod nieparzysty to cyfry 1,3,5,7,9 w miejscu dziesiątek i 1,3,5,7,9 w miejscu jedności.
Liczba uzyskanych kodów parzystych to: **5 · 5 = 25**

Kod parzysty to cyfry 2,4,6,8 w miejscu dziesiątek i 0,2,4,6,8 w miejscu jedności.
Liczba uzyskanych kodów parzystych to: **4 · 5=20**

Otwarcie sejfu to złamanie kodu parzystego LUB nieparzystego.

Liczba sposobów otwarcia sejfu to: **20 + 25 = 45**

Kombinatoryka

to metody zliczania (określania liczby) wszystkich zdarzeń oraz zdarzeń sprzyjających

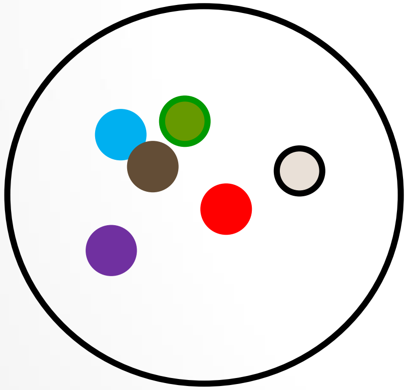
dwa sposoby przedstawiania wyników losowania:

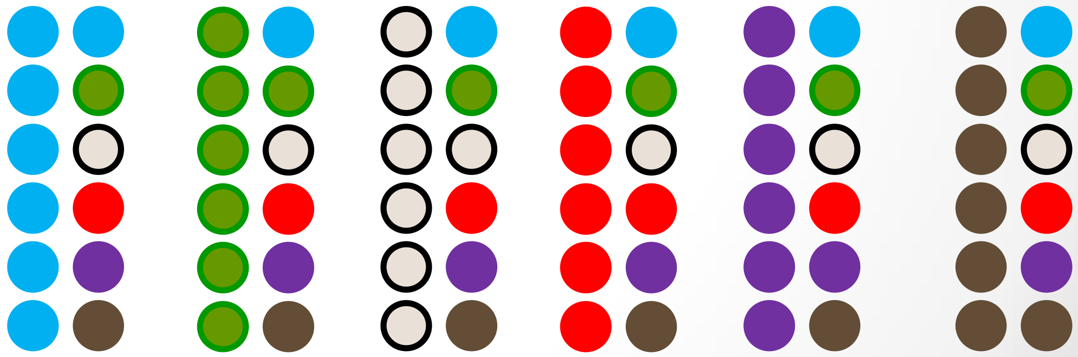
- istotna jest kolejność losowanych elementów – **wariacja**
- istotna jest liczba pobranych elementów **- kombinacja**

Kombinatoryka

<u>wariacja ze zwracaniem</u> - czyli losowanie k elementów z puli n-elementowej i rozmieszczenie ich na k miejscach

$$W_n^k = n^k$$



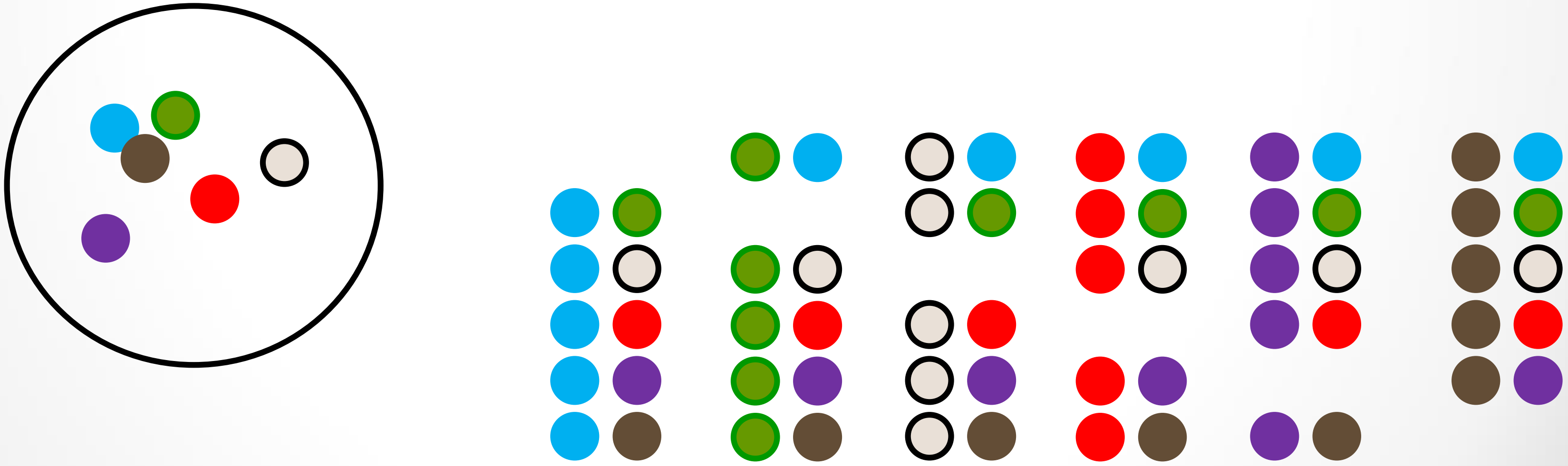


n=6 ; k =2 W=6^2

Kombinatoryka

<u>wariacja bez zwracania</u> - losowanie za każdym kolejnym razem ze zmniejszonej o jeden puli

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$



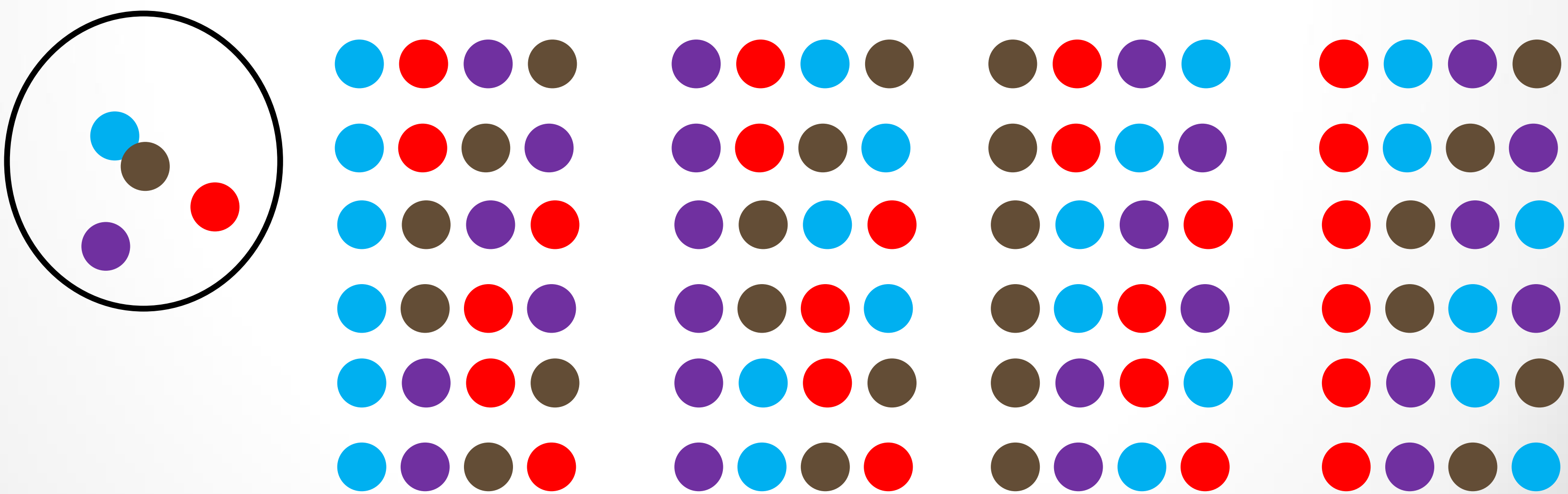
n=6 ; k =2 V=6!/4!=30

Kombinatoryka

- <u>wariacja bez zwracania</u>

gdy k = n (losowane wszystkie elementy i ustawiane w kolejności - <u>permutacja</u>

$$V_n^k = \frac{k!}{(n-n)!} = k!$$

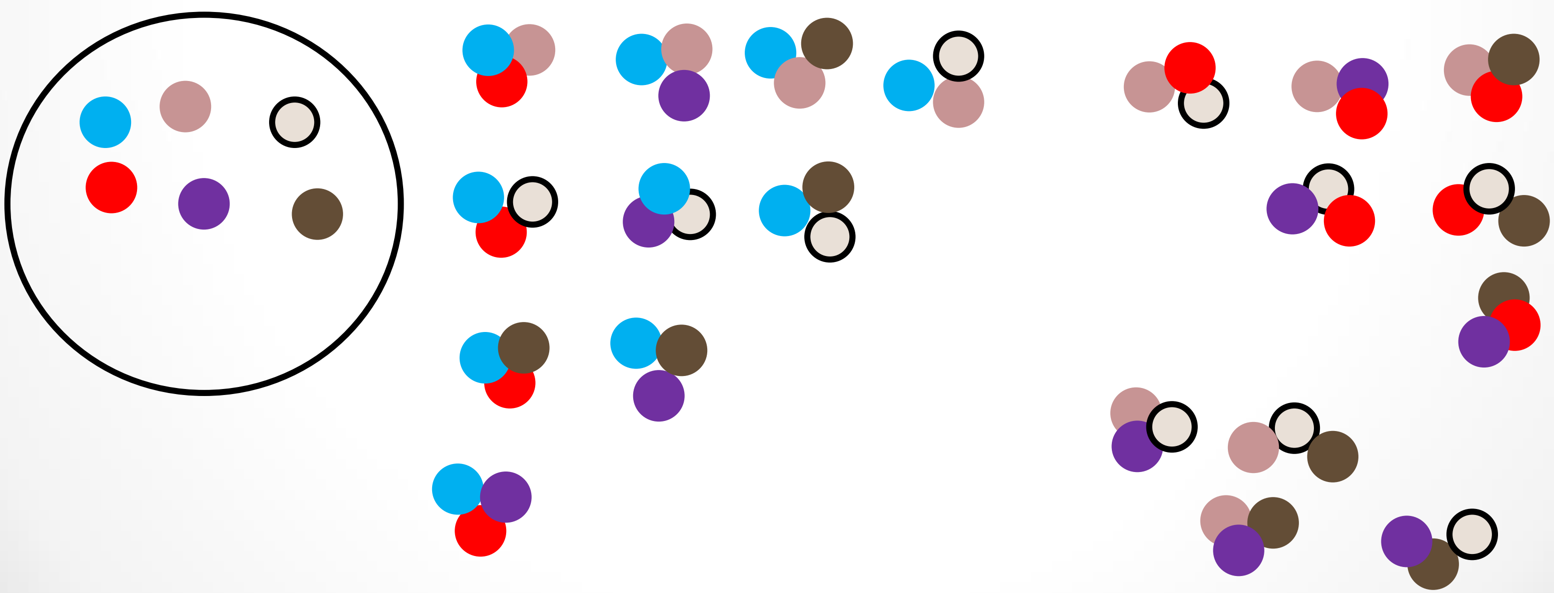


n=4 ; k =4 V=4!=24

Kombinatoryka

<u>kombinacja</u> - wybieranie k-elementowego zbioru z n-elementowego w jednym losowaniu

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$



n=6 ; k =3 C=6!/(3!3!)=20

Przykład

W klatce jest 5 białych i 2 czarne myszy. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dwie myszy, które pierwsze wyjdą w klatki będę czarne.

$$\Omega = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

$$A = \binom{2}{2} \cdot \binom{5}{0} = \frac{2!}{2! \cdot 0!} \cdot \frac{5!}{0! \cdot 5!} = 1$$

$$P(A) = \tfrac{1}{21}$$

Przykład

Autobus wiozący 6 pasażerów może się zatrzymać na 4 przystankach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszyscy pasażerowie wysiądą na jednym przystanku.

$$\Omega = 4^6 = 2048$$

$$A = 4$$

$$P(A) = 4/2048 = 1/512$$

Przykład

W stadzie są 4 białe gęsi i 2 siodłate. Jakie jest prawdopodobieństwo, że siodłata gęś będzie szła pierwsza, gdy ptaki będą szły gęsiego.

$\Omega =$

$$\Omega = 6! = 720$$

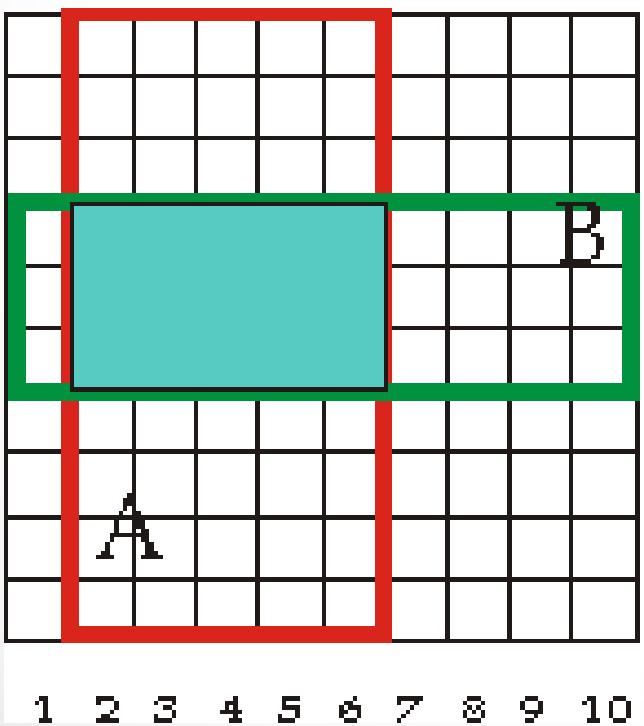
$$A = \binom{2}{1} \cdot 5! = \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot 5! = 240$$

$$P(A) = {}^{240}\!/_{720} = {}^{1}\!/_{3}$$

Niezależność

zdarzenia A i B są <u>niezależne</u> gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



$P(A) = {}^{50}/_{100} = 0,5$

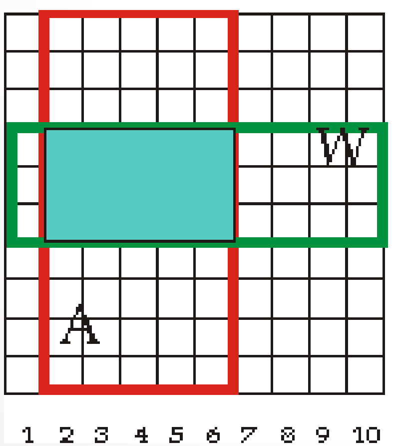
$P(B) = {}^{30}/_{100} = 0,3$

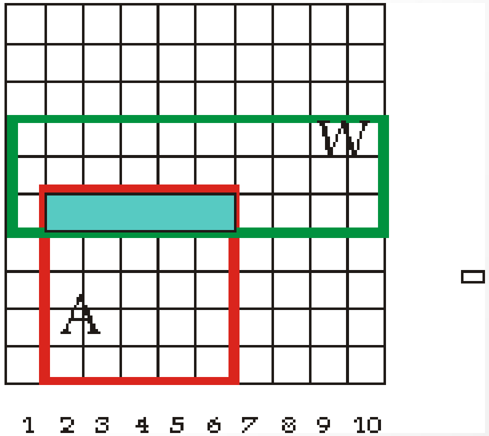
$P(A \cap B) = {}^{15}/_{100} = 0,15 = 0,5 \times 0,3$

Prawdopodobieństwo warunkowe

prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem, że zajdzie zdarzenie W

$$P(A/W) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)}$$





- P(A/W)=0,15/0,3=0,5

P(A/W)=0,05/0,3=$^{1}/_{6}$

Rozkład prawdopodobieństwa

W populacji są osoby o grupie krwi A, B, AB i 0 w proporcji 4:2:3:1.

P(A) = 4/10 = 0,4

P(B) = 2/10 = 0,2

P(AB) = 3/10 = 0,3

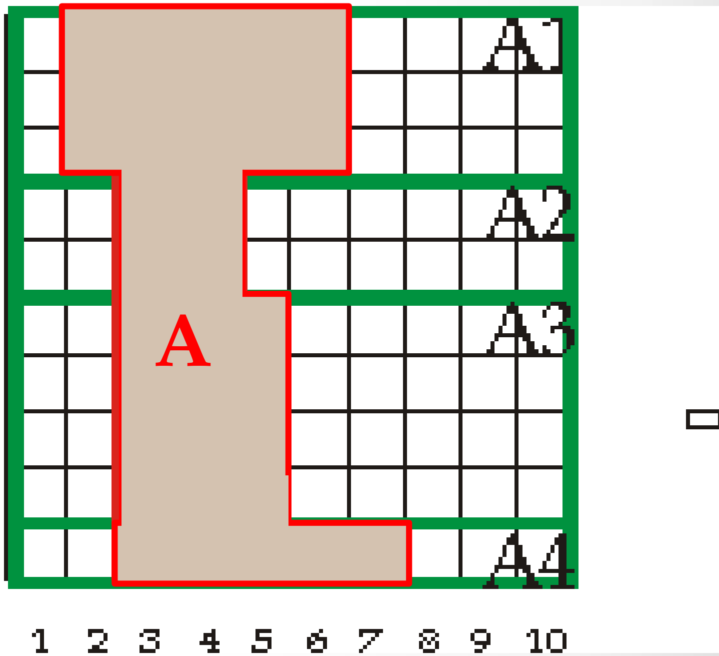
P(0) = 1/10 = 0,1

Suma **1,0**

Prawdopodobieństwo całkowite

$$P(A) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(A/A_n) \cdot P(A_n)$$

Gdzie $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \Omega$



$P(A) = {}^{15}/_{30} \cdot 0{,}3 + {}^{4}/_{20} \cdot 0{,}2 +$

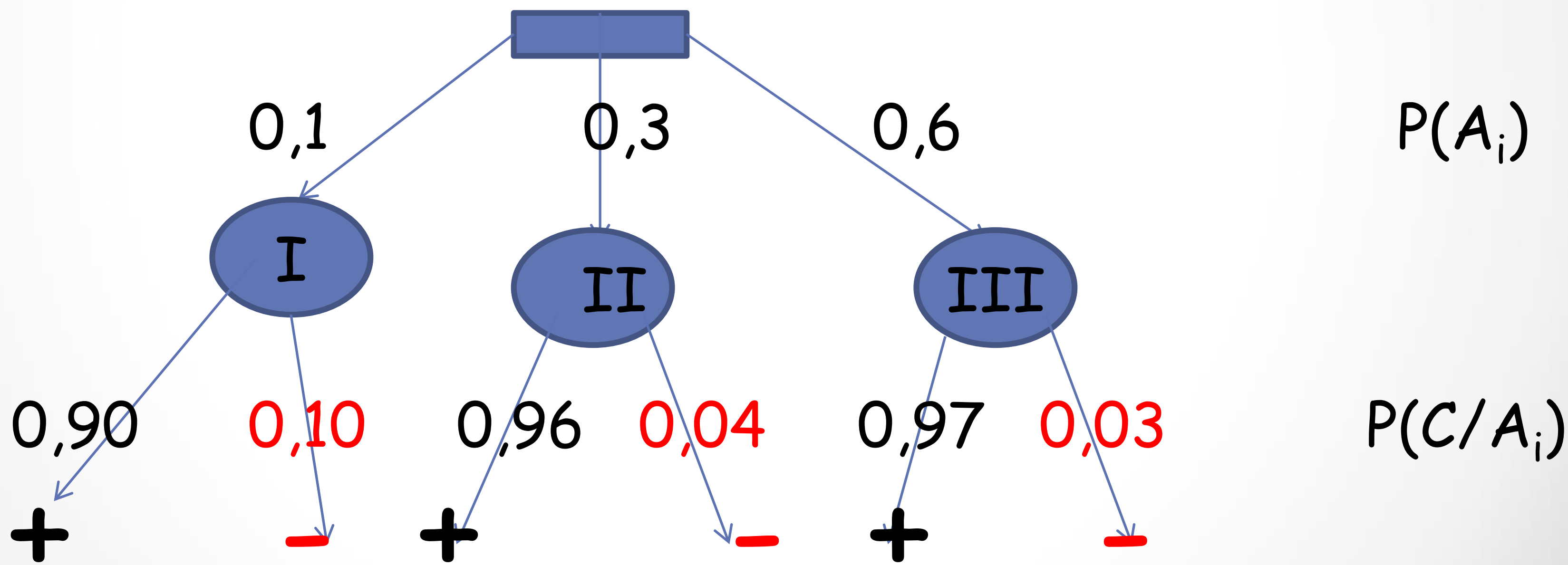
$+ {}^{12}/_{40} \cdot 0{,}4 + {}^{5}/_{10} \cdot 0{,}1 =$

$= 0{,}15 + 0{,}04 + 0{,}12 + 0{,}05 =$

$= 0{,}36$

Przykład

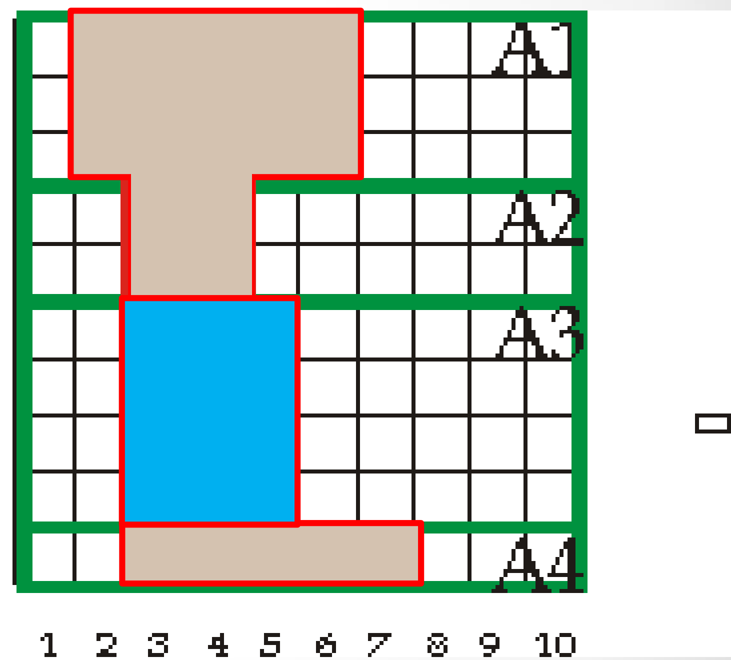
Puszki do sklepu są dostarczane przez trzech producentów w proporcji 1:3:6. Wadliwość puszek wynosi: 0,1; 0,04; 0,03.



$P(-) = 0{,}1 \times 0{,}10 + 0{,}3 \times 0{,}04 + 0{,}6 \times 0{,}03 = 0{,}01 + 0{,}012 + 0{,}018 = 0{,}04$

wzór Bayes'a na wielkość prawdopodobieństwa a'posteriori

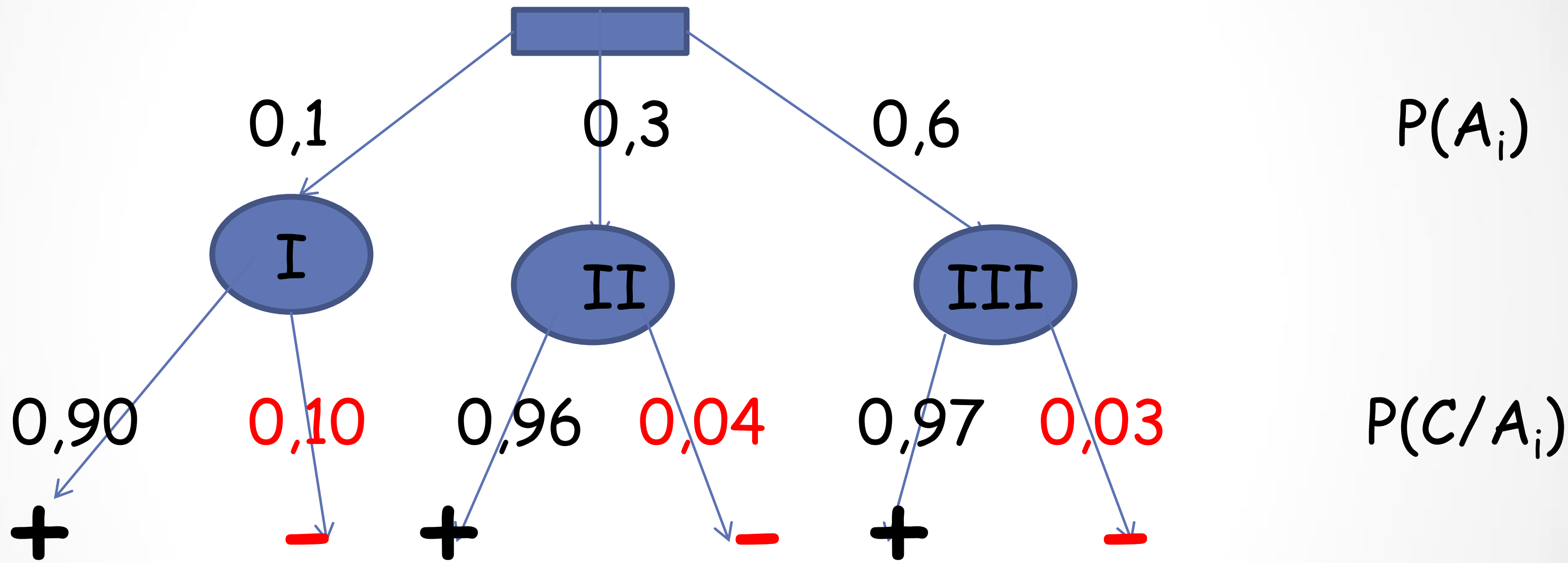
$$P(A_i / A) = \frac{P(A/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/A_i)\cdot P(A_i)}$$



$P(A_3/A) = ({}^{12}/{}_{40} \cdot 0{,}4)/0{,}36 = {}^{0{,}12}/{}_{0{,}35} = {}^{1}/{}_{3}$

Przykład

Puszki do sklepu są dostarczane przez trzech producentów w proporcji 1:3:6. Wadliwość puszek wynosi 0,1; 0,04; 0,03.



$P(III/-) = 0,6 \times 0,03 \; / \; 0,04 = 0,018/0,040 = 9/20$

Przykład

W populacji są osoby o grupie krwi A, B, AB i 0 w proporcji 4:2:3:1. Szansa reakcji na lek wynosi odpowiednio: 0,4; 0,1; 0,2; 0,6.

Obliczyć prawdopodobieństwo, że osoba wrażliwa na lek ma grupę krwi AB.

$$P(AB/W) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3}{0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}1} =$$

$$= \frac{0{,}06}{0{,}16 + 0{,}02 + 0{,}06 + 0{,}06} = \frac{0{,}06}{0{,}30} = 0{,}20$$

Przykład

Wiedząc, że P(B) = 2/3, P(A/B) = 1/4, obliczyć $P(A \cap B)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \cap B) = 1/6$

Wiedząc, że $P(A \cap B) = 1/6$, P(A/B) = 1/3, P(B/A) = 1/2, obliczyć $P(A \cup B)$

P(A) = 1/3 ; P(B) = 1/2 ; $P(A \cup B) = 1/3 + 1/2 - 1/6 = 2/3$

Wiedząc, że P(B) = P(B'), oraz P(A/B) + P(A/B') = 2/3, obliczyć P(A)

$$P(A) = P(A/B) \cdot P(B) + P(A/B') \cdot P(B')$$

P(B) = P(B') = 1/2 ; P(A) = 1/3


Pica pica